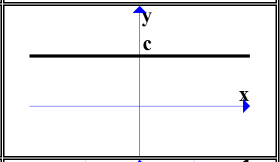
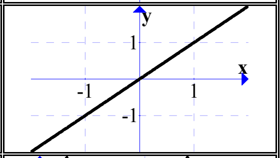
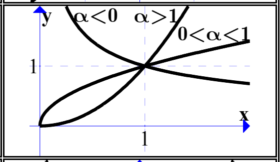
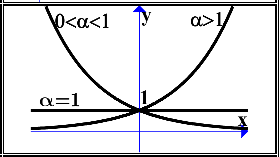
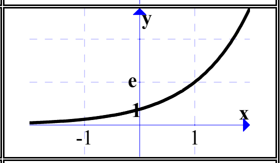
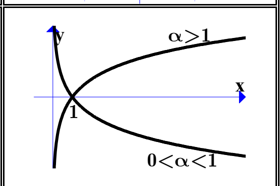
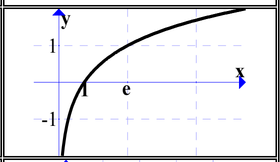
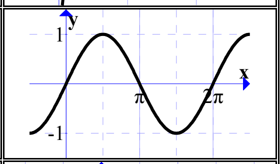
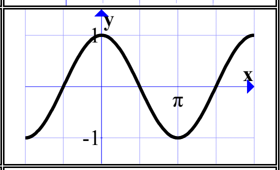
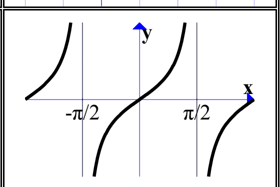
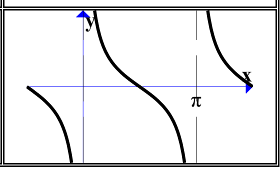
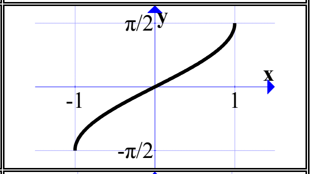
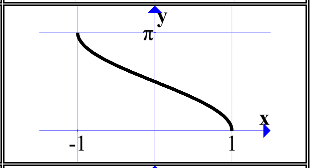
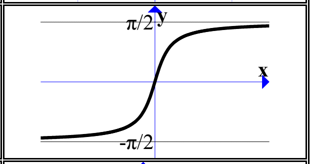
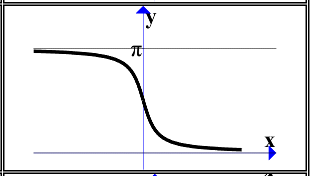
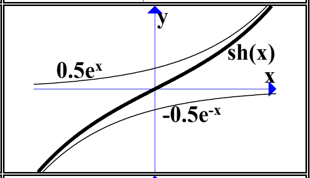
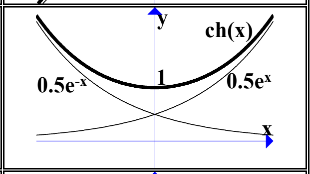
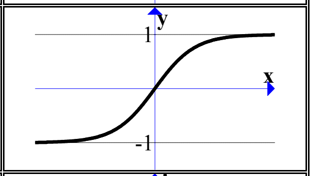
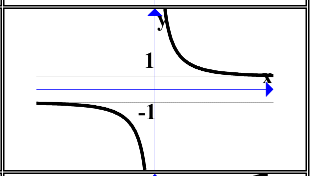
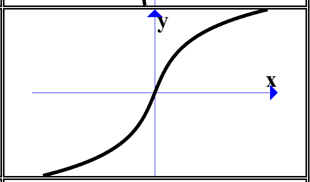
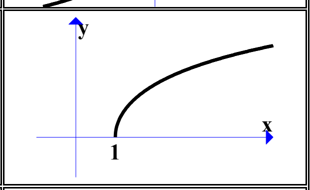
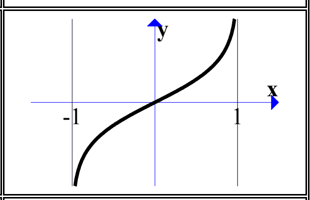
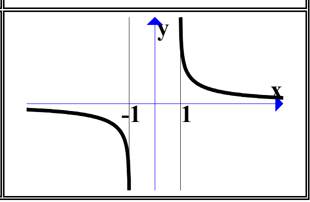
DERIVÁLÁS: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\in\mathbb{R}$,

$$f(x)-f(x_0)=A\cdot(x-x_0)+\varepsilon\cdot(x-x_0),\quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon=0.$$

Elemi függvények

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$ *gráfja*
$c=const.$	0	
x	1	
x^{α}	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	
α^{x} $(\alpha>0)$	$a^{x}\cdot\ln a$	
e^{x}	e^{x}	
$\log_{\alpha}x=\dfrac{\ln x}{\ln\alpha}$ $(x>0,$ $\alpha>0,\alpha\neq1)$	$\dfrac{1}{x\cdot\ln\alpha}$	
$\ln x$ $(x>0)$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
tgx $\left(x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\right.$ $\left.k\in\mathbb{Z}\right)$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}=$ tg^2x+1	
$ctgx$ $(x\neq k\cdot\pi,k\in\mathbb{Z})$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}=$ $-ctg^2x-1$	

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$ *gráfja*
$\arcsin x$ $\lvert x\rvert\le1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x\rvert<1)$	
$\arccos x$ $\lvert x\rvert\le1$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x\rvert<1)$	
$arctgx$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$arcctgx$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	
$shx=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	chx	
$chx=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$	shx	
$thx=\dfrac{shx}{chx}$	$\dfrac{1}{ch^2x}=$ $1-th^2x$	
$cthx=\dfrac{chx}{shx}$ $(x\neq0)$	$\dfrac{-1}{sh^2x}=$ $1-cth^2x$	
$Arshx=$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$Archx=$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(x\ge1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(x>1)$	
$Arthx=$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $(\lvert x\rvert<1)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	
$Arcthx=$ $=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{x-1}$ $(\lvert x\rvert>1)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	

www.mat-fiz-stat-tanoda.com

Deriválási szabályok

$(c\cdot f)'=$	$c\cdot f'$
$(f\pm g)'=$	$f'\pm g'$
$(f\cdot g)'=$	$f'\cdot g+f\cdot g'$
$(f_1\cdot\ldots\cdot f_r)'=$	$\sum_{k=1}^{r}(f_1\cdot\ldots\cdot f_k'\cdot\ldots\cdot f_r)$
$(f_1\cdot\ldots\cdot f_r)^{(n)}=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!}f_1^{(k_1)}\cdot\ldots\cdot f_r^{(k_r)}$	
$\left(\frac{f}{g}\right)'=$	$\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
$(f\circ g)'=$	$(f'\circ g)\cdot g'$
$(f^{-1})'=$	$\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$
$(f^g)'=(e^{\ln f^g})'=(e^{g\cdot\ln f})'=$	$f^g\cdot\left(g'\cdot\ln f+g\cdot\frac{f'}{f}\right)$
$y=f^g\Rightarrow\ln y=\ln f^g=g\cdot\ln f\Rightarrow\frac{1}{y}y'=(g\cdot\ln f)'$	
$F(x,y)=0$	$y'=-\frac{F_x'}{F_y'}$
$x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$	$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}$ $y''=\frac{\ddot\psi\cdot\dot\varphi-\dot\psi\cdot\ddot\varphi}{(\dot\varphi)^3}$
$x=r(\varphi)\cdot\cos\varphi$ $y=r(\varphi)\cdot\sin\varphi$	$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot r(\varphi)\cdot\sin\varphi+r(\varphi)\cdot\cos\varphi}{\dot r(\varphi)\cdot\cos\varphi-r(\varphi)\cdot\sin\varphi}$

Alkalmazások

ELASZTICITÁS:	$\varepsilon(x_0)=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\cdot x_0$
Érintő:	$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$
Normális:	$y=\frac{-1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$
Síkgörbék hajlásszöge:	$tg\omega=\left\lvert\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right\rvert$
Simulókör (u,v) középpontja, r sugara:	$u=x_0-f'(x_0)\cdot\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$ $v=f(x_0)+\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$ $r=\frac{\sqrt{(1+f'^2(x_0))^3}}{\lvert f''(x_0)\rvert}$

Taylor-polinom, maradéktag:	$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k,$ $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1},$ $ahol\quad\lvert\xi-x_0\rvert<\lvert x-x_0\rvert.$

Szélsőérték számítás

	$f^{(k)}(x_0)=0,\quad ha\quad k=1,2,3,\ldots,n-1$	
	$f^{(n)}(x_0)>0$	$f^{(n)}(x_0)<0$
n páros	minimum	maximum
n páratlan	$\nearrow$	$\searrow$

Inflexió számítás

	$f^{(k)}(x_0)=0,\quad ha\quad k=2,3,\ldots,n-1$	
	$f^{(n)}(x_0)>0$	$f^{(n)}(x_0)<0$
n páros	$\cup$	$\cap$
n páratlan	inflexiós pont	

Taylor-sor

$$f(x)\to T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,\quad\lvert x-x_0\rvert<R$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}},\quad R=\lim\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$$

Néhány elemi függvény Taylor-sora

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n,\quad(x\in\mathbb{R})$
$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n,\quad(0<x\le 2)$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1},\quad(x\in\mathbb{R})$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n},\quad(x\in\mathbb{R})$
$arctgx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1},\quad(\lvert x\rvert\le 1)$
$shx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1},\quad(x\in\mathbb{R})$
$chx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot x^{2n},\quad(x\in\mathbb{R})$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad ha\quad\lvert x\rvert<1$
$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n,\quad ha\quad\lvert x\rvert<1,$ $\binom{\alpha}{0}=1,\quad\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$

INTEGRÁLÁS, Primitív függvény: $F'(x)=f(x)$

$f(x)$	$\int f(x)dx=F(x)+C$
$c=const.$	$c\cdot x+C$
$x^\alpha,\quad (\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{x},\quad (x\neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\alpha^x,\quad (\alpha>0,\alpha\neq 1)$	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+C$
e^x	e^x+C
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x},\quad \left(x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right)$	$tgx+C$
$\frac{1}{\sin^2 x},\quad (x\neq k\cdot\pi,k\in\mathbb{Z})$	$-ctgx+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\lvert x\rvert<1)$	$\arcsin x+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\lvert x\rvert<1)$	$-\arccos x+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-arcctgx+C$
shx	$chx+C$
chx	$shx+C$
$\frac{1}{ch^2x}=1-th^2x$	$thx+C$
$\frac{1}{sh^2x}=cth^2x-1,\quad (x\neq 0)$	$-cthx+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$Arshx+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad (x>1)$	$Archx+C$
$\frac{1}{1-x^2},\quad (\lvert x\rvert<1)$	$Arthx+C$
$\frac{1}{1-x^2},\quad (\lvert x\rvert>1)$	$Arcthx+C$
$\frac{1}{1-x^2},\quad (\lvert x\rvert\neq 1)$	$\frac{1}{2}\cdot\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+C$

Kiegészítés

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad ch^2x-sh^2x=1$$
$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x,\quad sh^2x+ch^2x=ch2x$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x,\quad 2\cdot shx\cdot chx=sh2x$$
$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x,\quad sh^2x=\tfrac{1}{2}ch2x-\tfrac{1}{2},$$
$$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2x,\quad ch^2x=\tfrac{1}{2}ch2x+\tfrac{1}{2}$$

Integrálási szabályok

$\int(c_1\cdot f\pm c_2\cdot g)=$	$c_1\cdot\int f\pm c_2\cdot\int g$
$\int f(a\cdot x+b)dx=$	$\frac{F(a\cdot x+b)}{a}+C,\quad (a\neq 0)$
$\int f'\cdot f^\alpha=$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad (\alpha\neq -1)$
$\int\frac{f'}{f}=$	$\ln\lvert f\rvert+C$
$\int(f\circ g)\cdot g'=$	$F\circ g+C$

Parciális integrálás: $\int f'\cdot g=f\cdot g-\int f\cdot g'$

„Integrálóst integrálom deriválóst békén hagyom, integrálóst integrálom deriválóst deriválom.”

$p(x)=$	$a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$
$h(x)=$	$x^\alpha,\quad (\alpha\neq -1,\alpha\in\mathbb{R})$
$l(x)=$	$\log_\alpha x,\quad (\alpha>0,\alpha\neq 1)$
$t(x)=$	$\sin x,\quad \cos x,\quad shx,\quad chx,\quad \alpha^x,\quad e^x$
$a(x)=$	$\arcsin x,\arccos x, arctgx, arcctgx$ $Arshx, Archx, Arthx, Arcthx$

„integrálós” f'	„deriválós” g
$h(x)$	$l^n(x),\quad (n\in\mathbb{N})$
$p(x)$	$a(x)$
$t(a\cdot x+b)$	$p(x)$
$t(a\cdot x+b)$	$t(c\cdot x+d)$

Helyettesítéses integrálás

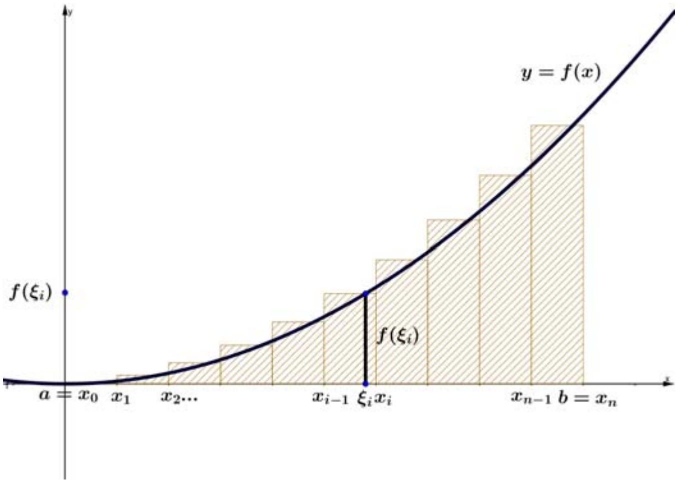
$$\int f(x)dx=?\quad x=u(t)\Leftrightarrow t=u^{-1}(x)$$
$$dx=\dot{u}(t)dt\Rightarrow\int f(x)dx=\int f(u(t))\cdot\dot{u}(t)dt$$

TÍPUS	HELYETTESÍTÉS	$dx=$
$R(e^x)$	$t=e^x\Leftrightarrow x=\ln t$	$\frac{1}{t}dt$
$R(\sin x,\cos x)$	$t=tg\frac{x}{2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2}{1+t^2}dt$
$R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$	$x=\sin t$ $\sqrt{1-x^2}=\cos t$	$\cos t dt$
$R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right)$	$x=sht$ $\sqrt{x^2+1}=cht$	$chtdt$
$R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)$	$x=cht$ $\sqrt{x^2-1}=sht$	$shtdt$

$$\sin 30^0=\cos 60^0=\tfrac{1}{2},\quad \sin 45^0=\cos 45^0=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 60^0=\cos 30^0=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Riemann-integrál, Newton-Leibniz-formula

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{\Delta x_i\}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = F(b)-F(a)$$



Alkalmazások

$$T=\int_a^b f(x)dx,\quad T=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\dot{x}(t)dt$$

$$T_{szektor}=\frac{1}{2}\cdot\int_{t_1}^{t_2}(x\cdot\dot{y}-y\cdot\dot{x})dt,\quad T_{szektor}=\frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx,\quad s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt,\quad s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+\dot{r}^2}d\varphi$$

$$F_x=2\pi\cdot\int_a^b y\cdot\sqrt{1+y'^2}dx,\quad F_x=2\pi\cdot\int_{t_1}^{t_2} y\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

$$V=\int_a^b T(x)dx,\quad V_x=\pi\cdot\int_a^b y^2dx,\quad V_x=\pi\cdot\int_{t_1}^{t_2} y^2\cdot\dot{x}dt$$

$$görbe:\quad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx},\quad y_s=\frac{\int_a^b y\cdot\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx}$$

$$lemez:\quad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot ydx}{\int_a^b ydx},\quad y_s=\frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

$$forgástest:\quad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot y^2dx}{\int_a^b y^2dx}$$

Numerikus integrálás

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

ÖSSZETETT SIMPSON-FORMULA: $I\approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+4y_{2n-1}+y_{2n})$,

$$h=\frac{b-a}{2\cdot n},\ |R|\le\frac{(b-a)\cdot h^4}{180}\cdot M_4.$$

ÖSSZETETT TRAPÉZFORMULA:

$$I\approx h\cdot\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right),$$

$$h=\frac{b-a}{n},\ |R|\le\frac{(b-a)\cdot h^2}{12}\cdot M_2.$$

TÉGLÁNYÖSSZEG: $h=\frac{b-a}{n},\ |R|\le\frac{(b-a)\cdot h}{2}\cdot M_1$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M_n,\quad x\in[a;b]$$

Fourier-sor valós alakja

$$f(t)=f(t+T),\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad f(t)\to F(t)$$

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)+b_n\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\right),$$

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_a^{a+T} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)dt,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}[f(t)+f(-t)]\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\cdot\int_a^{a+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)dt.$$

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t+\varphi_n),$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad tg\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}.$$

Fourier-sor komplex alakja

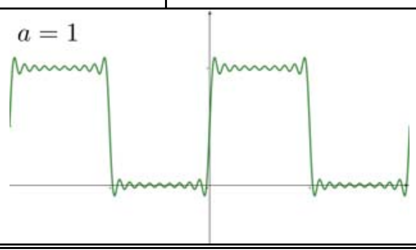
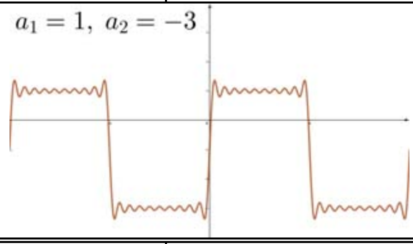
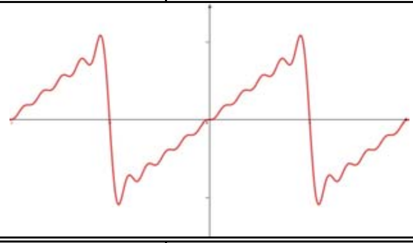
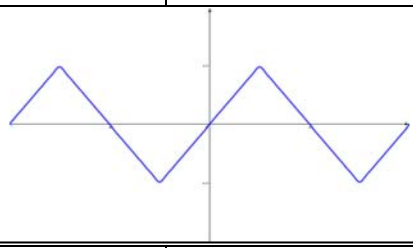
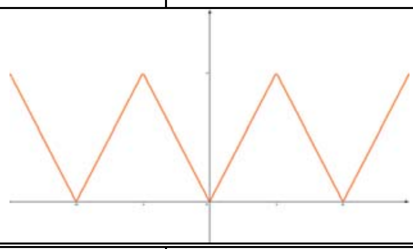
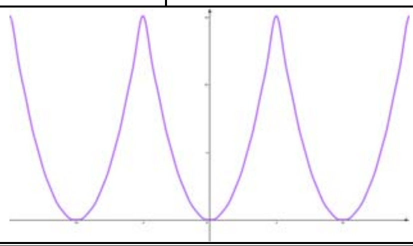
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i\cdot n\cdot\omega\cdot t}$, ahol

$$c_n=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-i\cdot n\cdot\omega\cdot t}dt=\begin{cases}0,5\cdot a_0, & n=0\\ 0,5\cdot(a_n-ib_n), & n>0\\ 0,5\cdot(a_{-n}+ib_{-n}), & n<0\end{cases}$$

Különböző szimmetriák

1. Ha $f(t)=f(-t)$, azaz a fv. páros, akkor $$a_n=\frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,dt,\quad b_n=0.$$ $$(n=0,1,2,...)$$
2. Ha $f(t)=-f(-t)$, azaz a fv. páratlan, akkor $$a_n=0,\quad b_n=\frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,dt.$$ $$(n=0,1,2,...)$$
3. Ha $f\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f(t)$, akkor $$a_{2n+1}=\frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos((2n+1)\cdot\omega\cdot t)\,dt,\quad a_{2n}=0,$$ $$b_{2n+1}=\frac{4}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin((2n+1)\cdot\omega\cdot t)\,dt,\quad b_{2n}=0.$$ $$(n=0,1,2,...)$$
4. Ha $f(t)=f(-t)$ és $f\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f(t)$, akkor $$a_{2n+1}=\frac{8}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cdot\cos((2n+1)\cdot\omega\cdot t)\,dt,\quad a_{2n}=b_n=0.$$ $$(n=0,1,2,...)$$
5. Ha $f(t)=-f(-t)$ és $f\left(t+\frac{T}{2}\right)=-f(t)$, akkor $$a_n=b_{2n}=0,\quad b_{2n+1}=\frac{8}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{4}} f(t)\cdot\sin((2n+1)\cdot\omega\cdot t)\,dt.$$ $$(n=0,1,2,...)$$

Néhány függvény Fourier-sora, az első 10 tag összegfüggvénye

$f(t+T)=f(t)$ $\forall t\in\mathbb{R}$	$F(t)$
$\begin{cases} a, & 0<t<\pi \\ 0, & \pi<t<2\pi \\ \frac{a}{2} & t=0;\pi;2\pi \end{cases}$	$\frac{a}{2}+\frac{2a}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$
	
$\begin{cases} a_1, & 0<t<\pi \\ a_2, & \pi<t<2\pi \\ \frac{a_1+a_2}{2}, & t=0;\pi;2\pi \end{cases}$	$\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{2(a_1-a_2)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$
	
$\begin{cases} t, & -\pi<t<\pi \\ 0, & t=-\pi;\pi \end{cases}$	$2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$
	
$\begin{cases} -\pi-t, & -\pi\le t<\frac{-\pi}{2} \\ t, & \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ \pi-t, & \frac{\pi}{2}<t\le\pi \end{cases}$	$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)t$
	
$\lvert t\rvert,\quad -\pi\le t\le\pi$	$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}$
	
$t^2,\quad -\pi\le t\le\pi$	$\frac{\pi^2}{3}-4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nt$
	

FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

$$f:]-\infty;\infty[\to\mathbb{C}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot f(t)dt,\ \omega\in\mathbb{R}.$$

EREDETI TARTOMÁNY	KÉPTARTOMÁNY
Linearitás $\mathcal{F}\{c_1\cdot f(t)\pm c_2\cdot g(t)\}=$	$c_1\cdot F(\omega)\pm c_2\cdot G(\omega)$
Hasonlóság (léptékváltoztatás) $\mathcal{F}\{f(a\cdot t)\}=$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a\neq 0,\ a\in\mathbb{R}$
$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\lvert a\rvert}f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=$	Hasonlóság $F(a\cdot\omega)$, $a\neq 0,\ a\in\mathbb{R}$
Eltolás jobbra $\mathcal{F}\{f(t-a)\}=$	$e^{-i\cdot a\cdot\omega}\cdot F(\omega)$, $a\in\mathbb{R},\ a\geq 0$
Eltolás balra $\mathcal{F}\{f(t+a)\}=$	$e^{i\cdot a\cdot\omega}\cdot F(\omega)$, $a\in\mathbb{R},\ a\geq 0$
Csillapítás $\mathcal{F}\{e^{i\cdot a\cdot t}\cdot f(t)\}=$	$F(\omega-a)$, $a\in\mathbb{R}$
Deriválás $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}=$	$i\cdot\omega^n\cdot F(\omega)$
Első derivált $\mathcal{F}\{f'(t)\}=$	$i\cdot\omega\cdot F(\omega)$
Második derivált $\mathcal{F}\{f''(t)\}=$	$i\cdot\omega^2\cdot F(\omega)$
$\mathcal{F}\{t^n\cdot f(t)\}=$	Deriválás $i^n\cdot F^{(n)}(\omega)$
Integrálás $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=0\Rightarrow$ $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right\}=$	$\frac{1}{i\cdot\omega}\cdot F(\omega)$
$F^{(n)}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\cdot f(t)dt$	
Parseval-formula $\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2d\omega$	
Konvolúció $\mathcal{F}\{(f*g)(t)\}=$ $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau\right\}=$	$F(\omega)\cdot G(\omega)$

Exponenciális Fourier-transzformáció

$$F_e(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\cdot\omega\cdot t}f(t)dt$$

Fourier-féle koszinusz transzformáció

$$\mathcal{F}_C\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)dt$$

Fourier-féle szinusz transzformáció

$$\mathcal{F}_S\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)dt$$

Átszámítási képletek

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathcal{F}_C\{f(t)+f(-t)\}-i\mathcal{F}_S\{f(t)-f(-t)\}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=2\cdot F_e(-\omega)$$

Alkalmazása függvényekre

$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)$
$\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<a\\ 0, & t\geq a\end{cases}$	$\frac{2\sin(a\cdot\omega)}{\omega}$
$\begin{cases}1, & 0<t<a\\ 0, & t>a\end{cases}$	$\frac{\sin(a\cdot\omega)}{\omega}-i\frac{1-\cos(a\cdot\omega)}{\omega}$
$\begin{cases}1, & -2a<t<0\\ -1, & 0<t<2a\\ 0 & \lvert t\rvert>2a\end{cases}$	$i\frac{4\sin^2(a\cdot\omega)}{\omega}$
$e^{-a\cdot\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(a)>0$
$\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-at}\cos(\omega_0 t), & t\geq 0\end{cases}$	$\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$, $a>0$

Inverz Fourier-transzformáció

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=$$

$$f(t)=\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}F(\omega)d\omega$$

Fourier-integrál

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\cdot\omega\cdot(t-\tau)}f(\tau)d\omega d\tau.$$

$$f(t)=\int_0^{\infty}[a(\omega)\cdot\cos(\omega\cdot t)+b(\omega)\cdot\sin(\omega\cdot t)]d\omega,$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)dt,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)dt$$

LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

$$f:[0;\infty[\to\mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-s\cdot t}\cdot f(t)dt,\ s\in\mathbb{C}$$

EREDETI TARTOMÁNY	KÉPTARTOMÁNY
Linearitás $\mathcal{L}\{a\cdot f(t)\pm b\cdot g(t)\}=$	$a\cdot F(s)\pm b\cdot G(s)$
Hasonlóság $\mathcal{L}\{f(a\cdot t)\}=$	$\frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right),\quad (a>0)$
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=$	Hasonlóság $F(a\cdot s),\quad (a>0)$
Eltolás jobbra $\mathcal{L}\{H_a(t)\cdot f(t-a)\}=$	$e^{-a\cdot s}\cdot F(s),\ a\ge 0$
Eltolás balra $\mathcal{L}\{f(t+a)\}=$	$e^{a\cdot s}\cdot\left(F(s)-\int_0^a e^{-s\cdot t}\cdot f(t)dt\right),$ $a\ge 0$
Csillapítás $\mathcal{L}\{e^{-a\cdot t}\cdot f(t)\}=$	Eltolás $F(s+a),\quad a\in\mathbb{C}$
Deriválás $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=$	$s^n\cdot F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-(k+1)}\cdot f^{(k)}(0)$
Első derivált $\mathcal{L}\{f'(t)\}=$	$s\cdot F(s)-f(0)$
Második derivált $\mathcal{L}\{f''(t)\}=$	$s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-f'(0)$
$\mathcal{L}\{t^n\cdot f(t)\}=$	Deriválás $(-1)^n\cdot F^{(n)}(s)$
Integrálás $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=$	$\frac{1}{s}\cdot F(s)$
$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\cdot f(t)\right\}=$	Integrálás $\int_s^\infty F(\tau)d\tau$
Periodikus függvény $\mathcal{L}\{f(t)=f(t+T)\}=$ $\forall t\in[0;\infty[$	$\frac{1}{1-e^{-T\cdot s}}\int_0^T e^{-s\cdot t}f(t)dt$
Konvolúció $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}=$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau\right\}=$	$F(s)\cdot G(s)$
$\mathcal{L}\{f(t)\cdot g(t)\}=$	Konvolúció $\frac{1}{2\pi i}\int_{x_1-i\infty}^{x_1-i\infty}F(z)\cdot G(s-z)dz$

Alkalmazás

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$
$1,\quad (t\ge 0)$	$\frac{1}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$
$t^n,\quad (n=0,1,2,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$
$e^{a\cdot t},\quad (a\in\mathbb{C})$	$\frac{1}{s-a},\quad (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,a)$
$\sin(b\cdot t),\quad (b\in\mathbb{R})$	$\frac{b}{s^2+b^2},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$
$\cos(b\cdot t),\quad (b\in\mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+b^2},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$
$sh(a\cdot t),\quad (a\in\mathbb{C})$	$\frac{a}{s^2-a^2},\quad (\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,a\rvert)$
$ch(a\cdot t),\quad (a\in\mathbb{C})$	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad (\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,a\rvert)$
$e^{a\cdot t}\cdot\sin(b\cdot t)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{a\cdot t}\cdot\cos(b\cdot t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$t^n\cdot e^{a\cdot t}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$t\cdot\sin(b\cdot t)$	$\frac{2\cdot s\cdot b}{(s^2+b^2)^2}$
$t\cdot\cos(b\cdot t)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
Dirac-delta $\delta(t-a)$	$e^{-a\cdot s},\quad (a\ge 0)$
$\delta(t-a)\cdot f(t)$	$e^{-a\cdot s}\cdot f(a),\quad (a\ge 0)$
Egységugrás, Heaviside-fv. $H_a(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a\end{cases}$	$\frac{e^{-a\cdot s}}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$
Négyszögjel $H_a(t)-H_b(t)=$ $\begin{cases}1, & a\le t\le b\\ 0, & t\in[0;a[\cup]b;\infty[\end{cases}$	$\frac{e^{-a\cdot s}-e^{-b\cdot s}}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0)$

Résztörtekre bontás speciális esetben

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
$F(s)=\frac{H(s)}{G(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{H(s_i)}{G'(s_i)\cdot(s-s_i)}$ $H(s)$ a $G(s)$-nél alacsonyabb fokszámú polinom, $G(s)$ polinomnak egyszeres valós zérushelyei: $s_1,\ldots,s_n$	$\sum_{i=1}^{n}\frac{H(s_i)}{G'(s_i)}\cdot e^{s_i\cdot t}$

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

Differenciálhatóság

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha lézik $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right)$ lineáris leképezés, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\left\| f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0) \right\|_{\mathbb{R}^m}}{\left\| x - x_0 \right\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$.

Differenciálhányados (Jacobi-mátrix) $J_{f,x}(x_0) =$

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Iránymenti derivált

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$,

$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t},$$

ha f differenciálható x_0-ban, akkor

$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0) \cdot v.$$

Differenciál

$$df(x_0, x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Gradiens vektor

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$grad f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

- $\nabla f(x_0)$ az f legnagyobb növekedési iránya, $\left\| \nabla f(x_0) \right\|$ pedig annak mértéke
- $\nabla f(x_0)$ az x_0 ponton átmenő $f = \textit{állandó}$ szintfelület normálisa

Hesse-mátrix

$$\nabla^2 f(x_0) = H(x_0) =$$

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Láncszabály

- $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
  $$f(x) = f(x_1(p), \cdots, x_n(p)),$$
  $$f'_p = \nabla f \cdot x'(p)$$
- $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,
  $$f(p, x) = f(p, x_1(p), \cdots, x_n(p)),$$
  $$f'_p = \frac{\partial f}{\partial p} + \nabla_x f \cdot x'(p)$$
- $f: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$,
  $$f(p, x) =$$
  $$f(p_1, \cdots, p_m, x_1(p_1, \cdots, p_m), \cdots, x_n(p_1, \cdots, p_m))$$
  $$f'_p = \nabla_p f + J_{x,p} \cdot \nabla_x f$$

Implicit függvény tétel

- $f_i: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,
  $$f_i(p, x_1(p), \cdots, x_n(p)) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$
  $$x'_p = -J_{f,x}^{-1} \cdot f'_p$$
- $f_i: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$,
  $$f_i(p_1, \cdots, p_m, x_1(p_1, \cdots, p_m), \cdots, x_n(p_1, \cdots, p_m)) = 0$$
  $$i = 1, 2, \ldots, n$$
  $$x'_{p_i} = -J_{f,x}^{-1} \cdot f'_{p_i}$$
  $$X'_p = -J_{f,x}^{-1} \cdot F'_p$$

Feltétel nélküli szélsőérték számítás

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \to extremum$

$H(x_0) = \nabla^2 f(x_0)$ DEFINITSÉGE	$\nabla f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ A megoldás minősége
pozitív definit	*szigorú lokális minimum*
negatív definit	*szigorú lokális maximum*
indefinit	*nyeregpont*
szemidefinit	*további vizsgálat szükséges*

Ha $\left| f_{x_1x_1}(x_0) \right|$, $\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) \end{vmatrix}$, …, $\det H(x_0)$ előjele rendre a következő:

- $+, +, \ldots, +$, akkor $H(x_0)$ pozitív definit,
- $-, +, -, +, \ldots$, akkor $H(x_0)$ negatív definit.

Feltételes szélsőérték számítás I.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \to extremum$$

feltétel(ek):

$$g_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$
$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Lagrange-függvény

$$L(x,\lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots \lambda_k) = f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i$$

Szükséges feltétel: $\nabla L(x,\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^{n+k}$, azaz

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_x L(x,\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^n \\ \nabla_\lambda L(x,\lambda) = 0 \in \mathbb{R}^k \end{array}\right\}$$

$\nabla_x^2 L$ i-edik főminorából és a $J_{g,x}$-ból képezett szegélyezett mátrix determinánsa

$$\left|\tilde{H}_i\right| = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & \cdots & L_{x_1x_i} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_ix_1} & \cdots & L_{x_ix_i} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

$$i = \quad k+1, \quad k+2, \quad \dots, \quad n.$$

Elégséges feltétel

LAGRANGE-FÜGGVÉNY HESSE-MÁTRIXÁNAK FELTÉTELES DEFINITSÉGE	$\nabla L(x_0,\lambda_0) = 0$ A megoldás minősége
feltételesen pozitív definit $(-1)^k \cdot \left|\tilde{H}_{k+1}(x_0,\lambda_0)\right| > 0,$ $(-1)^k \cdot \left|\tilde{H}_{k+2}(x_0,\lambda_0)\right| > 0,$ $\vdots$ $(-1)^k \cdot \left|\tilde{H}_n(x_0,\lambda_0)\right| > 0$	*szigorú lokális minimum*
feltételesen negatív definit $(-1)^{k+1} \cdot \left|\tilde{H}_{k+1}(x_0,\lambda_0)\right| > 0,$ $(-1)^{k+2} \cdot \left|\tilde{H}_{k+2}(x_0,\lambda_0)\right| > 0,$ $\vdots$ $(-1)^n \cdot \left|\tilde{H}_n(x_0,\lambda_0)\right| > 0$	*szigorú lokális maximum*

Néhány speciális eset

- $n = 2, \quad k = 1,\ \left|\tilde{H}_2\right| = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix}$

$\left|\tilde{H}_2(x_0,\lambda_0)\right| < 0 \Rightarrow$ *szigorú lokális minimum*

$\left|\tilde{H}_2(x_0,\lambda_0)\right| > 0 \Rightarrow$ *szigorú lokális maximum*

- $n = 3, \quad k = 1,\ \left|\tilde{H}_2\right| = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix},$

$$\left|\tilde{H}_3\right| = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & L_{x_1x_3} & \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & L_{x_2x_3} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ L_{x_3x_1} & L_{x_3x_2} & L_{x_3x_3} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}$$

$\left|\tilde{H}_2(x_0,\lambda_0)\right| < 0, \left|\tilde{H}_3(x_0,\lambda_0)\right| < 0 \Rightarrow$

szigorú lokális minimum

$\left|\tilde{H}_2(x_0,\lambda_0)\right| > 0, \left|\tilde{H}_3(x_0,\lambda_0)\right| < 0 \Rightarrow$

szigorú lokális maximum

- $n = 3, \quad k = 2$

$$\left|\tilde{H}_3\right| = \begin{vmatrix} L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & L_{x_1x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & L_{x_2x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ L_{x_3x_1} & L_{x_3x_2} & L_{x_3x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\left|\tilde{H}_3(x_0,\lambda_0)\right| > 0 \Rightarrow$ *szigorú lokális minimum*

$\left|\tilde{H}_3(x_0,\lambda_0)\right| < 0 \Rightarrow$ *szigorú lokális maximum*

Feltételes szélsőérték számítás II.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \min$

feltételek:

$g_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, k$.

$h_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$,

$j = 1, 2, \ldots, l$.

Lagrange-függvény

$$L(x,\lambda) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l) =$$
$$= f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot h_j$$

Szükséges feltételek:

- $\nabla_x L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^n$,
- $\nabla_\lambda L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^k$,
- $\nabla_\mu L(x,\lambda,\mu) \le 0 \in \mathbb{R}^l$,
- $\mu_j \cdot h_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$
- $\mu \ge 0 \in \mathbb{R}^l$

Elégséges feltétel

A $\nabla^2 L(x_0, \lambda_0, \mu_0)$ mátrixból hagyjuk el azokat az oszlopokat és sorokat, amelyek inaktív feltételekhez tartoznak, illetve aktív feltételhez tartoznak, de a Lagrange-szorzójuk 0.

AZ AKTUALIZÁLT LAGRANGE-FÜGGVÉNY HESSE-MÁTRIXÁNAK FELTÉTELES DEFINITSÉGE	A MEGOLDÁS MINŐSÉGE
feltételesen pozitív definit	*szigorú lokális minimum*

Feltételes szélsőérték számítás III.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to \max$

feltétel(ek):

$g_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, k$.

$h_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$,

$j = 1, 2, \ldots, l$.

Lagrange-függvény

$$L(x,\lambda) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l) =$$
$$= f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot h_j$$

Szükséges feltételek

- $\nabla_x L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^n$,
- $\nabla_\lambda L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^k$,
- $\nabla_\mu L(x,\lambda,\mu) \ge 0 \in \mathbb{R}^l$,
- $\mu_j \cdot h_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$,
- $\mu \ge 0 \in \mathbb{R}^l$

Elégséges feltétel

A $\nabla^2 L(x_0, \lambda_0, \mu_0)$ mátrixból hagyjuk el azokat az oszlopokat és sorokat, amelyek inaktív feltételekhez tartoznak, illetve aktív feltételhez tartoznak, de a Lagrange-szorzójuk 0.

AZ AKTUALIZÁLT LAGRANGE-FÜGGVÉNY HESSE-MÁTRIXÁNAK FELTÉTELES DEFINITSÉGE	A MEGOLDÁS MINŐSÉGE
feltételesen negatív definit	*szigorú lokális maximum*

Feltételes szélsőérték számítás IV.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \to$ *extremum*

feltétel(ek):

$g_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, k$,

$h_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$,

$j = 1, 2, \ldots, m$,

$h_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$,

$j = m+1, m+2, \ldots, l$.

Lagrange-függvény

$$L(x,\lambda) = L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l) =$$
$$= f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot h_j$$

Szükséges feltételek

- $\nabla_x L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^n$,
- $\nabla_\lambda L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^k$,
- $\nabla_\mu L(x,\lambda,\mu)$ első m koordinátája ≤ 0, a többi ≥ 0,
- $\mu_j \cdot h_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$,
- minimum esetén $\mu \in \mathbb{R}^l$ első m koordinátája ≥ 0, a többi ≤ 0,
- maximum esetén $\mu \in \mathbb{R}^l$ első m koordinátája ≤ 0, a többi ≥ 0.

Elégséges feltétel

A $\nabla^2 L(x_0,\lambda_0,\mu_0)$ mátrixból hagyjuk el azokat az oszlopokat és sorokat, amelyek inaktív feltételekhez tartoznak, illetve aktív feltételhez tartoznak, de a Lagrange-szorzójuk 0.

AZ AKTUALIZÁLT LAGRANGE-FÜGGVÉNY HESSE-MÁTRIXÁNAK FELTÉTELES DEFINITSÉGE	A MEGOLDÁS MINŐSÉGE
feltételesen negatív definit	*szigorú lokális maximum*
feltételesen pozitív definit	*szigorú lokális minimum*

Feltételes szélsőérték számítás V.

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1,\dots,x_n) \to \min$

feltétel(ek):

- $g_i: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, $i = 1,2,\dots,k$.
- $h_j: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_j(x_1,x_2,\dots,x_n) \le 0$, $j = 1,2,\dots,l$,
- $x \ge 0 \in \mathbb{R}^n$

Lagrange-függvény

$$L(x,\lambda) = L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots\lambda_k,\mu_1,\dots,\mu_l) =$$
$$= f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot g_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot h_j$$

Szükséges feltételek

- $\nabla_x L(x,\lambda,\mu) \ge 0 \in \mathbb{R}^n$,
- $\left[L'_{x_i}(x,\lambda,\mu)\right] x_i = 0$, $i = 1,2,\dots,n$
- $\nabla_\lambda L(x,\lambda,\mu) = 0 \in \mathbb{R}^k$,
- $\nabla_\mu L(x,\lambda,\mu) \le 0 \in \mathbb{R}^l$,
- $\mu_j \cdot h_j(x) = 0$, $j = 1,2,\dots,l$,
- $\mu \ge 0 \in \mathbb{R}^l$,
- $x \ge 0 \in \mathbb{R}^n$.

Elégséges feltétel

A $\nabla^2 L(x_0,\lambda_0,\mu_0)$ mátrixból hagyjuk el azokat az oszlopokat és sorokat, amelyek inaktív feltételekhez tartoznak, illetve aktív feltételhez tartoznak, de a Lagrange-szorzójuk 0.

AZ AKTUALIZÁLT LAGRANGE-FÜGGVÉNY HESSE-MÁTRIXÁNAK FELTÉTELES DEFINITSÉGE	A MEGOLDÁS MINŐSÉGE
feltételesen pozitív definit	*szigorú lokális minimum*

Konvexitás

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D nemüres nyílt konvex halmaz

$\nabla^2 f(x) = H(x)$ DEFINITSÉGE $\forall x \in D$-RE	f
pozitív szemidefinit	*Konvex, és ha x_0 optimális megoldása $\min\{f(x) \mid x \in D\}$-nek, akkor x_0 globális megoldás is.*
negatív szemidefinit	*Konkáv, és ha x_0 optimális megoldása $\max\{f(x) \mid x \in D\}$-nek, akkor x_0 globális megoldás is.*
pozitív definit	*Szigorúan konvex, és ha x_0 optimális megoldása $\min\{f(x) \mid x \in D\}$-nek, akkor x_0 az egyetlen globális megoldás.*
negatív definit	*Szigorúan konkáv, és ha x_0 optimális megoldása $\max\{f(x) \mid x \in D\}$-nek, akkor x_0 az egyetlen globális megoldás.*

$\nabla^2 f(x)$ FELTÉTELES DEFINITSÉGE $\nabla f(x)$-RE NÉZVE	f
feltételesen pozitív szemidefinit	*kvázikonvex*
feltételesen negatív szemidefinit	*kvázikonkáv*

TAYLOR-POLINOM, MARADÉKTAG:

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(x_0)}{k!},$$

$$R_{n+1} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!},$$

ahol $\|\xi - x_0\| < \|x - x_0\|$.

Speciális eset: $T_2(x) = f(x_0) +$

$$+\nabla f(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^T \cdot \nabla^2 f(x_0)\cdot(x - x_0)$$