Térgörbék differenciálgeometriája

$$\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

$$\dot{\vec{r}}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\big(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\big)$$

$$\vec{r}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{r}^{(k)}(t_0)}{k!}\cdot(t-t_0),\quad |t-t_0|<R$$

Deriválási szabályok

$\frac{d}{dt}(\vec{c})=$	$\vec{0}$, ahol $\vec{c}=const.$
$\frac{d}{dt}\big(c\cdot\vec{r}(t)\big)=$	$c\cdot\dot{\vec{r}}$, ahol $c=const.$
$\frac{d}{dt}\big(\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t)\big)=$	$\dot{\vec{r}}_1\pm\dot{\vec{r}}_2$
$\frac{d}{dt}\big(\psi(t)\cdot\vec{r}(t)\big)=$	$\dot{\psi}\cdot\vec{r}+\psi\cdot\dot{\vec{r}}$
$\frac{d}{dt}\big(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\big)=$	$\dot{\vec{r}}_1\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2$
$\frac{d}{dt}\big(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\big)=$	$\dot{\vec{r}}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_2$
$\frac{d}{dt}\big[\vec{r}(s(t))\big]=$	$\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\dot{s}$

Térgörbén mozgó pont helyvektora által súrolt

terület vektora: $\vec{T}=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\vec{r}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)dt$

Ívhossz:

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{\vec{r}}(t)\|du=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt$$

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\dot{\vec{r}}(u)\|du=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(u)+\dot{y}^2(u)+\dot{z}^2(u)}du$$

Érintő egységvektor:

$$\vec{e}:=\vec{r}'(s)=\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|}$$

Főnormális egységvektor:

$$\vec{n}:=\frac{1}{\kappa}\vec{r}''(s)=\frac{\big[\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\big]\times\dot{\vec{r}}(t)}{\big\|\big[\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\big]\times\dot{\vec{r}}(t)\big\|}$$

Binormális egységvektor:

$$\vec{b}:=\vec{e}\times\vec{n}=\frac{1}{\kappa}\vec{r}'(s)\times\vec{r}''(s)=\frac{\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|}$$

Érintő ívhossz szerinti szögsebessége a **görbület**.

$$\kappa=\frac{1}{R}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\|\vec{r}''(s)\|=\frac{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$$

Binormális ívhossz szerinti szögsebessége a **torzió**.

$$\tau=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}=\frac{\vec{r}'(s)\vec{r}''(s)\vec{r}'''(s)}{\vec{r}''^2(s)}=\frac{\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|^2}$$

A görbe jobb- vagy balcsavarodású aszerint, amint a torziója pozitív vagy negatív.

EGYENES	EGYENLETE
Érintő	$\vec{R}(t)=\vec{r}(t_0)+t\cdot\dot{\vec{r}}(t_0),\ t\in\mathbb{R}$
Főnormális	$\vec{R}(t)=\vec{r}(t_0)+t\cdot\left\{\left[\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right]\times\dot{\vec{r}}(t_0)\right\},$ $t\in\mathbb{R}$
Binormális	$\vec{R}(t)=\vec{r}(t_0)+t\cdot\left[\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right],\ t\in\mathbb{R}$

SÍK	EGYENLETE
Simuló ($\vec{e}$, $\vec{n}$)	$\left[\vec{R}-\vec{r}(t_0)\right]\dot{\vec{r}}(t_0)\ddot{\vec{r}}(t_0)=0$
Normál ($\vec{n}$, $\vec{b}$)	$\left[\vec{R}-\vec{r}(t_0)\right]\dot{\vec{r}}(t_0)=0$
Rektifikáló ($\vec{b}$, $\vec{e}$)	$\left[\vec{R}-\vec{r}(t_0)\right]\left[\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\right]\dot{\vec{r}}(t_0)=0$

Frenet formulák:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}'(s)\\ \vec{n}'(s)\\ \vec{b}'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vec{e}(s)\\ \vec{n}(s)\\ \vec{b}(s)\end{bmatrix}$$

Darboux-vektor:

$$\vec{d}=\tau\vec{e}+\kappa\vec{b}$$

$$\vec{e}'=\vec{d}\times\vec{e},\quad \vec{n}'=\vec{d}\times\vec{n},\quad \vec{b}'=\vec{d}\times\vec{b}$$

A $\vec{e}'$, $\vec{n}'$, $\vec{b}'$ vektorhármas a $\vec{d}$ által meghatározott tengely körül, a jobbcsavar szabály szerint, közös $\|\vec{d}\|=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ ívhossz szerinti szögsebességgel

forgatja az $\vec{e}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ triédert.

Térgörbék egyenlete kísérő triéderben:

$$\vec{r}(s)=x(s)\vec{e}+y(s)\vec{n}+z(s)\vec{b}$$

$$x(s)\approx s,\ y(s)\approx\frac{\kappa}{2}s^2,\ z(s)\approx\frac{\kappa\tau}{6}s^3$$

Felületek differenciálgeometriája

Felület Gauss-féle megadási módja:

$$\vec{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)$$

Felület Euler-Monge-féle megadási módja:

$$\vec{r}(x,y)=\left(x,y,z=f(x,y)\right)$$

$$\vec{r}_u'=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\Delta u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\vec{r}(u,v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\partial}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial}{\partial v}\Delta v\right)^k \vec{r}\,\Big|_{(u_0,v_0)}}{k!},$$

ahol $\|(u,v)-(u_0,v_0)\|<R$

Deriválási szabályok

$(\vec{c})'_u=$	$\vec{0}$, ahol $\vec{c}=const.$
$\left(c\cdot\vec{r}(u,v)\right)'_u=$	$c\cdot\vec{r}_u'$, ahol $c=const.$
$\left(\vec{r}_1(u,v)\pm\vec{r}_2(u,v)\right)'_u=$	$\vec{r}_{1u}'\pm\vec{r}_{2u}'$
$\left(\psi(u,v)\cdot\vec{r}(u,v)\right)'_u=$	$\psi_u'\cdot\vec{r}+\psi\cdot\vec{r}_u'$
$\left(\vec{r}_1(u,v)\cdot\vec{r}_2(u,v)\right)'_u=$	$\vec{r}_{1u}'\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_{2u}'$
$\left(\vec{r}_1(u,v)\times\vec{r}_2(u,v)\right)'_u=$	$\vec{r}_{1u}'\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{r}_{2u}'$
$\left[\vec{r}\left(g(u,v),h(u,v)\right]'_u=$	$\vec{r}_g'\cdot g_u'+\vec{r}_h'\cdot h_u'$
$\left[\vec{r}\left(u(t),v(t)\right)\right]'_t=$	$\vec{r}_u'\cdot\dot{u}+\vec{r}_v'\cdot\dot{v}$

Néhány felület vektoregyenlete:

- $\vec{r}_0$ pontra illeszkedő $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorral párhuzamos sík egyenlete:
$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}_0+u\cdot\vec{a}+v\cdot\vec{b}$$
- $\vec{r}_1(u)$ vezérgörbéjű $\vec{a}$ alkotó-irányú hengerfelület egyenlete:
$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}_1(u)+v\cdot\vec{a}$$
- $\vec{r}_1(u)$ vezérgörbéjű $\vec{c}$ csúcspontú kúpfelület egyenlete:
$$\vec{r}(u,v)=\vec{c}+v\cdot\left(\vec{r}_1(u)-\vec{c}\right)$$
- $\vec{k}$ tengelyirányú és $\rho(z)$ meridián görbéjű forgásfelület egyenlete:
$$\vec{r}(u,v)=\left(\rho(u)\cdot\cos v,\rho(u)\cdot\sin v,u\right)$$
- $\vec{r}_1(u)$ vezérgörbéjű $\vec{r}_2(u)$ irányhatározójú vonalfelület egyenlete:
$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}_1(u)+v\cdot\vec{r}_2(u)$$

Az u és v paramétervonalak érintővektorai: $\vec{r}_u'$, $\vec{r}_v'$

Felületi normális: $\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'$

Felületi normális egyenes egyenlete:

$$\vec{R}=\vec{r}_0+t\cdot\left(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right)$$

Érintősík egyenlete: $\left[\vec{R}-\vec{r}_0\right]\vec{r}_u'\vec{r}_v'=0$

Felületi görbe: $\vec{r}=\vec{r}\left(u(t),v(t)\right)$

Felületi görbe érintővektora:

$$\dot{\vec{r}}(t)=\vec{r}_u'\cdot\dot{u}+\vec{r}_v'\cdot\dot{v}=\dot{v}\cdot\left(\vec{r}_u'\cdot\frac{\dot{u}}{\dot{v}}+\vec{r}_v'\right)$$

Gauss-féle elsőrendű főmennyiségek:

$$E=\vec{r}_u'^2,\quad F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v',\quad G=\vec{r}_v'^2$$

Felületi görbe ívhossza:

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}\,dt$$

Felületi görbe természetes triédere:

- érintő egységvektor: $\vec{e}:=\vec{r}'(s)=\xi\vec{r}_u+\eta\vec{r}_v$
- főnormális egységvektor: $\vec{n}:=\frac{1}{\kappa}\vec{r}''(s)$
- binormális egységvektor: $\vec{b}:=\vec{e}\times\vec{n}$

Felületi görbe alap triédere:

- érintő egységvektor: $\vec{e}:=\vec{r}'(s)=\xi\vec{r}_u+\eta\vec{r}_v$
- felületi normális egységvektor:
$$\vec{\nu}=\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\left\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\right\|}=\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\sqrt{EG-F^2}}$$
- geodétikus egység normális: $\vec{e}\times\vec{\nu}$

Gauss-féle másodrendű főmennyiségek:

$$L = \vec{v}\vec{r}''_{uu} = \frac{\vec{r}'_u\vec{r}'_v\vec{r}''_{uu}}{W}, \quad M = \vec{v}\vec{r}''_{uv} = \frac{\vec{r}'_u\vec{r}'_v\vec{r}''_{uv}}{W},$$

$$N = \vec{v}\vec{r}''_{vv} = \frac{\vec{r}'_u\vec{r}'_v\vec{r}''_{vv}}{W}, \text{ ahol}$$

$$W = \sqrt{EG - F^2}$$

Felületi görbe P pontbeli $\frac{1}{R}$ görbületének $\vec{v}\cdot\vec{n} = \cos\vartheta$ -szorosa:

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} = \frac{Lh^2 + 2Mh + N}{Eh^2 + 2Fh + G}, \text{ ahol}$$

$$h = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}.$$

A P pontban közös simulósíkú felületi görbék ottani görbülete megegyezik egymással, köztük e simulósík és a felület síkmetszetének görbületével is.

Meusnier-féle tétel: A P pontban közös érintőjű síkmetszetek P pontbeli görbületi középpontjai az érintősík egy oldalán, $|R_0|$ átmérőjű körön helyezkednek el, vagyis a ferde metszetek görbületi sugarai a normál metszet görbületi sugarának vetületei. $R = R_0 \cdot \cos\vartheta$

Normálmetszet előjeles görbületének változása, ha a metszősík a P pontbeli felületi normális körül forog:

$$\frac{1}{R} = \frac{Lh^2 + 2Mh + N}{Eh^2 + 2Fh + G}, \text{ ahol } h = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}.$$

Az előjeles görbületet előállító kvadratikus alak:

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \frac{1}{R}.$$

Az $\vec{r}'_u$, $\vec{r}'_v$, $\vec{v}$ vektorhármas koordinátarendszerében a felület közelítő egyenlete:

$$\left(\Delta\vec{r}(u,v)\right)\vec{v} \approx \frac{1}{2}\left[L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2\right]$$

Dupin-féle indikátrix:

$$L\sigma^2 + 2M\sigma\tau + N\tau^2 = \pm 1$$

$$D = LN - M^2$$

D	INDIKÁTRIX	P PONT
$D > 0$	ellipszis	elliptikus
$D = 0$	párhuzamos egyenespár	parabolikus
$D < 0$	konjugált hiperbolapár	hiperbolikus

Euler-féle tétel: A P ponton átmenő normálmetszet ottani görbületét teljesen meghatározza a két merőleges főmetszet P -beli görbülete, vagyis a két extrémális főgörbület valamint a normálmetszet és az első főmetszet síkjának (érintőjének) hajlásszöge.

Konjugált merőleges főérintők:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{v}_1\cdot\left(\vec{r}'_u\cdot h_1 + \vec{r}'_v\right), \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{v}_2\cdot\left(\vec{r}'_u\cdot h_2 + \vec{r}'_v\right), \text{ ahol}$$

$$h_1 = \frac{\dot{u}_1}{\dot{v}_1}, \quad h_2 = \frac{\dot{u}_2}{\dot{v}_2} \text{ a } T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \text{ egyenlet}$$

gyökei.

Középgörbület:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

Gauss-féle görbület:

$$K = \frac{1}{R_1R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

A főgörbületeket előállító másodfokú egyenlet:

$$\frac{1}{R^2} - 2H\frac{1}{R} + K = 0$$

A P pontbeli normálmetszet görbülete:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}_1}{\|\dot{\vec{r}}\|\cdot\|\dot{\vec{r}}_1\|}, \text{ ahol } R_1,\ R_2 \text{ főgörbületek.}$$

Dupin indikátrix kanonikus transzformáció után:

$$\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} = \pm 1$$

R_1, R_2	P PONT
$\operatorname{sgn} R_1 = \operatorname{sgn} R_2$	elliptikus
$R_1 = 0$, vagy $R_2 = 0$	parabolikus
$\operatorname{sgn} R_1 \neq \operatorname{sgn} R_2$	hiperbolikus

Felület felszíne:

$$F = \iint_{T_{uv}} \|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\| du dv = \iint_{T_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\, du dv =$$

$$= \iint_{T_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx dy$$

Vektoranalízis

Skalármező gradiense:

$grad\psi$ egy vektor, melyet a $\psi=\psi(\vec{r})$ skalármező minden pontjához hozzárendelhetünk és az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $grad\psi$ a $\psi = \acute{a}lland\acute{o}$ szintfelület normálisával egyező állású,
- $grad\psi$ a ψ függvény növekedésének megfelelő irányítású,
- $\|grad\psi\|=\dfrac{\partial\psi}{\partial\vec{v}}=$
$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{\psi(\vec{r}+\tau\cdot\vec{v})-\psi(\vec{r})}{\tau}=(grad\psi)\cdot\vec{v},$$
azaz a $grad\psi$ hossza megegyezik a ψ függvény $\vec{v}$ normális irányú irány menti deriváltjával,
- $\|grad\psi\|$ nagyobb azokban a pontokban, ahol az erővonalak sűrűsége nagyobb,
- $grad\psi=\vec{0}$ (a gradiens eltűnik) azokban a pontokban, ahol a $\psi=\psi(\vec{r})$ függvénynek szélsőértéke van.

Vektormező gradiense:

a $\vec{w}=\vec{w}(\vec{r})$ vektormező deriválttenzora, azaz

$$grad\vec{w}=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_x}{\partial z}\\ \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial z}\\ \frac{\partial w_z}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial z}\end{bmatrix}=\vec{w}\circ\nabla$$

Vektormező irány menti deriváltja:

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial\vec{a}}=(\vec{a}\cdot grad)\vec{w}=\begin{bmatrix}\frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_x}{\partial z}\\ \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial z}\\ \frac{\partial w_z}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial z}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{bmatrix}.$$

Vektormező divergenciája:

$div\vec{w}$ skalármező, amely ha $\vec{w}$ egy áramlásmezőt ír le, akkor megadja azt a folyadékmennyiséget, amely a $\vec{w}$ vektormező illető pontjában térfogat és időegység alatt keletkezik. $div\vec{w}>0$ esetén forrás, $div\vec{w}<0$ esetén pedig nyelő létezéséről beszélünk.

Vektormező rotációja:

Fektessünk egy kis $\mathcal{F}$ síkdarabot az $\vec{r}$ ponton át.

Ez a felületdarab leírható egy $\vec{F}$-ral, amely a felület $\vec{v}$ normálisának irányába mutat és nagysága a felület F felszíne. A felületdarab peremgörbéje g. Számítsuk ki a $\oint_g \vec{w}d\vec{r}$ körintegrált a felületdarabra a perem mentén.

Határozzuk meg a $\lim\limits_{F\to 0}\dfrac{\oint_g \vec{w}d\vec{r}}{F}$ határértéket úgy, hogy a felületdarab helyzete változatlan maradjon, majd változtassuk meg a felületdarab helyzetét úgy, hogy a kapott határérték maximális legyen. A hozzátartozó felületdarab felszíne $F_{\max}$, peremgörbéje $g_{\max}$. A $rot\vec{w}$ vektor az $\vec{r}$ pontban az a vektor, amelynek az abszolút értéke a talált maximális érték:

$$\|rot\vec{w}\|=\lim_{F\to 0}\frac{\oint_{g\max}\vec{w}d\vec{r}}{F_{\max}},$$ iránya a felületdarab normálisának irányával megegyezik.

$rot\vec{w}$ erővonalai a $\vec{w}=\vec{w}(\vec{r})$ vektormező örvényvonalai.

Hamilton-operátor (nabla-operátor):

$$\nabla(\ldots)=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\mathcal{F}} d\vec{F}(\ldots)$$

Descartes-koordinátákban: $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Gradiens:

$$grad\psi=\nabla\psi=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\mathcal{F}}\psi d\vec{F}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u_i}\cdot\vec{e}_i$$

Descartes-koordinátákban:

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}$$

Henger-koordinátákban:

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Gömbi polárkoordinátákban:

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta+\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$\nabla(c\cdot\psi)=$	$c\cdot\nabla\psi,\quad ahol\quad c=const.$
$\nabla(\psi_1\pm\psi_2)=$	$\nabla\psi_1\pm\nabla\psi_2$
$\nabla(\psi_1\cdot\psi_2)=$	$\psi_2\cdot(\nabla\psi_1)+\psi_1\cdot(\nabla\psi_2)$
$\nabla\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)=$	$\frac{\psi_2\cdot(\nabla\psi_1)-\psi_1\cdot(\nabla\psi_2)}{\psi_2^{\ 2}}$
$\nabla(\psi[\varphi])=$	$\frac{d\psi}{d\varphi}\cdot(\nabla\varphi)$
$\nabla(\psi[r])=$	$\frac{d\psi}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r},\quad ahol\quad r=\lVert\vec{r}\rVert$
$\nabla(\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2)=$	$=(\vec{w}_1\nabla)\vec{w}_2+(\vec{w}_2\nabla)\vec{w}_1+$ $+\vec{w}_1\times(\nabla\times\vec{w}_2)+\vec{w}_2\times(\nabla\times\vec{w}_1)$
$\nabla(\vec{c}\cdot\vec{r})=$	$=\vec{c},\quad ahol\quad \vec{c}=const.$
$\nabla c=$	$=\vec{0},\quad ahol\quad c=const.$

Divergencia: $div\vec{w}=\nabla\vec{w}=$

$$=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\mathcal{F}}\vec{w}d\vec{F}=\frac{1}{h_1\cdot h_2\cdot h_3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\left(\frac{w_i}{h_i}\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\right)}{\partial u_i}$$

Descartes-koordinátákban: $\nabla\vec{w}=\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}$

Henger-koordinátákban:

$$\nabla\vec{w}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot w_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Gömbi polárkoordinátákban: $\nabla\vec{w}=$

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2\cdot w_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial(w_\vartheta\cdot\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}$$

$\nabla(c\cdot\vec{w})=$	$c\cdot(\nabla\vec{w}),\quad ahol\quad c=const.$
$\nabla(\vec{w}_1\pm\vec{w}_2)=$	$\nabla\vec{w}_1\pm\nabla\vec{w}_2$
$\nabla(\psi\cdot\vec{w})=$	$\vec{w}\cdot(\nabla\psi)+\psi\cdot(\nabla\vec{w})$
$\nabla(\vec{w}_1\times\vec{w}_2)=$	$=\vec{w}_2\cdot(\nabla\times\vec{w}_1)-\vec{w}_1\cdot(\nabla\times\vec{w}_2)$
$\nabla\vec{c}=$	$=0,\quad ahol\quad \vec{c}=const.$

Rotáció: $rot\vec{w}=curl\vec{w}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\mathcal{F}} d\vec{F}\times\vec{w}=$

$$=\frac{1}{h_1\cdot h_2\cdot h_3}\cdot\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1\cdot w_1 & h_2\cdot w_2 & h_3\cdot w_3\end{vmatrix}=\ldots$$

Descartes-koordinátákban:

$$rot\vec{w}=\nabla\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}$$

Henger-koordinátákban:

$$\nabla\times\vec{w}=\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial w_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\partial w_r}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi+$$
$$\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot w_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$$

Gömbi polárkoordinátákban:

$$\nabla\times\vec{w}=\left(\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial(w_\varphi\cdot\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}-\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+$$
$$\left(\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot w_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta+$$
$$\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot w_\vartheta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$$

$\nabla\times(c\cdot\vec{w})=$	$c\cdot(\nabla\times\vec{w}),\quad ahol\quad c=const.$
$\nabla\times(\vec{w}_1\pm\vec{w}_2)=$	$\nabla\times\vec{w}_1\pm\nabla\times\vec{w}_2$
$\nabla\times(\psi\cdot\vec{w})=$	$(\nabla\psi)\times\vec{w}+\psi\cdot(\nabla\times\vec{w})$
$\nabla\times(\vec{w}_1\times\vec{w}_2)=$	$=(\vec{w}_2\nabla)\vec{w}_1-(\vec{w}_1\nabla)\vec{w}_2+$ $\vec{w}_1(\nabla\vec{w}_2)-\vec{w}_2(\nabla\vec{w}_1)$
$\nabla\times\vec{c}=$	$=\vec{0},\quad ahol\quad \vec{c}=const.$

Laplace-operátor:

Skalárfüggvényre:

$$\Delta\psi = \nabla(\nabla\psi) = div(grad\psi)$$

Vektormezőre:

$$\Delta\vec{w} = (\nabla\nabla)\vec{w} = \nabla(\nabla\cdot\vec{w}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{w}) =$$
$$= grad(div\vec{w}) - rot(rot\vec{w})$$

Eltűnési azonosságok:

$$div(rot\vec{w}) = \nabla(\nabla\times\vec{w}) = 0$$
$$rot(grad\psi) = \nabla\times(\nabla\psi) = \vec{0}$$

Descartes-koordinátákban:

$$\nabla\cdot\nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Hengerkoordinátákban:

$$\Delta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Gömbi polárkoordinátákban:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Integrálszámítás

Ívhossz: $\int_g ds = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$

Skalármező ívhossz szerinti integrálja:

$$\int_g \psi(\vec{r})\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \psi[\vec{r}(t)]\cdot\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt$$

Skalármező vonalintegrálja:

$$\int_g \psi(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \psi[\vec{r}(t)]\cdot\dot{\vec{r}}(t)dt$$

Vektormező skalárértékű vonalintegrálja:

$$\int_g \vec{w}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{w}[\vec{r}(t)]\cdot\dot{\vec{r}}(t)dt\,,$$

ha ψ a $\vec{w}$ skalárpotenciálja, akkor

$$\int_g \vec{w}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_g grad\psi\,d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\psi = \psi(\vec{r}_2) - \psi(\vec{r}_1)$$

Vektormező vektorértékű vonalintegrálja:

$$\int_g \vec{w}(\vec{r})\times d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{w}[\vec{r}(t)]\times\dot{\vec{r}}(t)dt$$

Felszín: $\oiint_{\mathcal{F}} dF = \iint_{T_{uv}} \|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\| dudv$

Skalármező felszíni integrálja:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \psi(\vec{r})\,dF = \iint_{T_{uv}} \psi[\vec{r}(u,v)]\cdot\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\| dudv$$

Skalármező fluxusa:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \psi(\vec{r})\,d\vec{F} = \iint_{T_{uv}} \psi[\vec{r}(u,v)]\cdot(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')dudv$$

Vektormező felületi integrálja (skaláris fluxusa):

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{w}(\vec{r})\,d\vec{F} = \iint_{T_{uv}} \vec{w}[\vec{r}(u,v)]\cdot(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')dudv$$

Vektormező vektoriális fluxusa:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{w}(\vec{r})\times d\vec{F} = \iint_{T_{uv}} \vec{w}[\vec{r}(u,v)]\times(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')dudv$$

Skalármező térfogati integrálja:

$$\iiint_V \psi(\vec{r})\,dV = \iiint_V \psi(x,y,z)\,dxdydz$$

Vektormező térfogati integrálja:

$$\iiint_V \vec{w}(\vec{r})\,dV =$$
$$= \vec{i}\cdot\iiint_V w_x(\vec{r})\,dV + \vec{j}\cdot\iiint_V w_y(\vec{r})\,dV + \vec{k}\cdot\iiint_V w_z(\vec{r})\,dV$$

Integrálredukciós tételek:

Gradiens-tétel:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \psi d\vec{F} = \iiint_V grad\psi dV$$

Gauss-Osztrogradszkij-tétel:

$$\oiint_{\mathcal{F}} \vec{w}d\vec{F} = \iiint_V div\vec{w}dV$$

Rotáció-tétel:

$$\oiint_{\mathcal{F}} d\vec{F}\times\vec{w} = \iiint_V rot\vec{w}dV$$

Stokes-tétel:

$$\oint_g \vec{w}d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}} rot\vec{w}d\vec{F}$$

Green-formula:

$$\oint_g (Pdx + Qdy) = \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Green I. tétele:

$$\iiint_V (grad\phi\cdot grad\psi + \phi\cdot\Delta\psi)\,dV = \oiint_{\mathcal{F}} \phi\cdot grad\psi d\vec{F}$$

Green II. tétele:

$$\iiint_V (\phi\cdot\Delta\psi - \psi\cdot\Delta\phi)\,dV = \oiint_{\mathcal{F}} (\phi\cdot grad\psi - \psi\cdot grad\phi)\,d\vec{F}$$

Skalárpotenciál számítás

$$\int_{g_1}\vec{w}d\vec{r}=\int_{g_2}\vec{w}d\vec{r} \quad\Leftrightarrow\quad \oint_{g}\vec{w}d\vec{r}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\times\vec{w}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{w}=\nabla\psi$$

$$\Leftrightarrow\quad d\psi=w_x dx+w_y dy+w_z dz$$

Részletesebben:

a vonalintegrálnak az út alakjától való függetlensége egyszeresen összefüggő tartományban - a differenciálhatósági feltételek teljesülése esetén - egyenértékű az alábbi kijelentések akármelyikével:

- zárt görbe mentén vett vonalintegrál zérus,
- a vektortér örvénymentes,
- a vektortérnek van potenciálja,
- az elemi munka teljes differenciál.

I. módszer:

1.) $\nabla\times\vec{w}=\vec{0}$

2.) $\vec{w}=\left(w_x,w_y,w_z\right)=\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)$

3.) $\psi=$

$$\int_{x_0}^{x} w_x(p,y_0,z_0)dp+\int_{y_0}^{y} w_y(x_0,q,z_0)dq+\int_{z_0}^{z} w_z(x_0,y_0,t)dt$$

II. módszer:

1.) $\nabla\times\vec{w}=\vec{0}$

2.) $\vec{w}=\left(w_x,w_y,w_z\right)=\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)$

3.) $\psi=\int w_x dx+f\left(y,z\right)$

4.) $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\equiv w_y \Rightarrow f\left(y,z\right)=\int ...dy+g\left(z\right)$

5.) $\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\equiv w_z \Rightarrow g\left(z\right)=\int ...dz+c$

III. módszer:

1.) $\nabla\times\vec{w}=\vec{0}$

2.) $\vec{w}=\left(w_x,w_y,w_z\right)=\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)$

3.) $\psi=\int w_x dx+f\left(y,z\right)$

4.) $\psi=\int w_y dy+g\left(x,z\right)$

5.) $\psi=\int w_z dx+h\left(x,y\right)$

f,g,h a sorok összehasonlításával meghatározható

Vektorpotenciál számítás

$$\iint_{\mathcal{F}_1}\vec{v}d\vec{F}=\iint_{\mathcal{F}_2}\vec{v}d\vec{F} \quad\Leftrightarrow\quad \oiint_{\mathcal{F}}\vec{v}d\vec{F}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{v}=\nabla\times\vec{w}$$

A felületi integrálnak a felület alakjától való függetlensége egyszeresen összefüggő tartományban - a differenciálhatósági feltételek teljesülése esetén - egyenértékű az alábbi kijelentések akármelyikével:

- zárt felület mentén a felületi integrál zérus,
- a vektortér forrásmentes,
- a vektortérnek van vektorpotenciálja.

1.) $\nabla\cdot\vec{v}=0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

2.) $\vec{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)=$

$$\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z},\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x},\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)$$

3.) A $\vec{w}$ egyik tetszőleges koordinátáját szabadon választjuk, legyen pl. $w_x:=0$.

4.) $w_y=\int_{x_0}^{x} v_z(p,y,z)dp+f(y,z)$

5.) $w_z=\int_{x_0}^{x} -v_y(p,y,z)dp+g(y,z)$

6.) $v_x(x,y,z)=\dfrac{\partial w_z}{\partial y}-\dfrac{\partial w_y}{\partial z}=$

$$\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\bigg|_{x=p}dp+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_{x=p}dx+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$=v_x(x,y,z)-v_x(x_0,y,z)+\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}$$

7.) Az f,g tetszőleges függvények, legyen pl. $f(y,z):=0$.

8.) $g(y,z)=\int_{y_0}^{y} v_x(x_0,q,z)dq$

9.) $\vec{w}$ koordinátái:

$$w_x=0,\ w_y=\int_{x_0}^{x} v_z(p,y,z)dp,$$

$$w_z=\int_{y_0}^{y} v_x(x_0,q,z)dq-\int_{x_0}^{x} v_y(p,y,z)dp$$

A $\vec{w}$ vektorpotenciál meghatározása nem egyértelmű, egy tetszőleges skalárfüggvény gradiensének hozzáadása ugyanazt a $\vec{v}$ vektormezőt adja $\vec{w}\to\vec{w}+\nabla\psi$.

Tenzorok

Additív és homogén vektormezők:

$$\vec{w}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\vec{w}(\vec{r}_1)+\vec{w}(\vec{r}_2),\ \vec{w}(c\cdot\vec{r})=c\cdot\vec{w}(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{w}=\underline{\underline{A}}\cdot\vec{r}}$$

$$\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}_{sz}+\underline{\underline{A}}_{a},\ \underline{\underline{A}}_{sz}=\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}^T\right),\ \underline{\underline{A}}_{a}=\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{A}}^T\right)$$

Műveleti szabályok

$\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}\pm\underline{\underline{B}}$	$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$
$\underline{\underline{C}}=\lambda\cdot\underline{\underline{A}}$	$c_{ij}=\lambda a_{ij}$
$\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$	$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$
$\underline{\underline{C}}=\vec{a}\times\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{C}}\cdot\vec{r}=\vec{a}\times\left(\underline{\underline{A}}\cdot\vec{r}\right)$ $c_{ij}=\vec{e}_i\vec{a}\vec{a}_j$
$\underline{\underline{C}}=\vec{a}\circ\vec{b}$	$c_{ij}=a_i\cdot b_j$

Tenzor skalár-invariánsai:

- $a_I=a_{11}+a_{22}+a_{33}$
- $a_{II}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$
- $a_{III}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

Tenzor vektor-invariánsa: $\vec{a}$

a tenzor antiszimmetrikus részének a vektor-invariánsa

$$\underline{\underline{A}}_a=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}0&a_{12}-a_{21}&a_{13}-a_{31}\\a_{21}-a_{12}&0&a_{23}-a_{32}\\a_{31}-a_{13}&a_{32}-a_{23}&0\end{bmatrix}=\vec{a}\times\underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{A}}_a\cdot\vec{r}=\vec{a}\times\left(\underline{\underline{I}}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{1}{2}\cdot\left(a_{32}-a_{23},\quad a_{13}-a_{31},\quad a_{21}-a_{12}\right)}$$

Deriválttenzor $\vec{w}\circ\nabla$ skalár-invariánsai:

- $a_I=\nabla\cdot\vec{w}$
- $a_{II}=\begin{vmatrix}\frac{\partial w_x}{\partial x}&\frac{\partial w_x}{\partial y}\\\frac{\partial w_y}{\partial x}&\frac{\partial w_y}{\partial y}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial w_x}{\partial x}&\frac{\partial w_x}{\partial z}\\\frac{\partial w_z}{\partial x}&\frac{\partial w_z}{\partial z}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial w_y}{\partial y}&\frac{\partial w_y}{\partial z}\\\frac{\partial w_z}{\partial y}&\frac{\partial w_z}{\partial z}\end{vmatrix}$
- $a_{III}=\begin{vmatrix}\frac{\partial w_x}{\partial x}&\frac{\partial w_x}{\partial y}&\frac{\partial w_x}{\partial z}\\\frac{\partial w_y}{\partial x}&\frac{\partial w_y}{\partial y}&\frac{\partial w_y}{\partial z}\\\frac{\partial w_z}{\partial x}&\frac{\partial w_z}{\partial y}&\frac{\partial w_z}{\partial z}\end{vmatrix}$

Deriválttenzor vektor-invariánsa: $\vec{a}$

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{w}=\frac{1}{2}rot\vec{w}$$

Differenciálási szabályok

$$\frac{d\psi}{d\vec{r}}=\nabla\psi,\quad \vec{w}'(\vec{r})=\frac{d\vec{w}(\vec{r})}{d\vec{r}}=\underline{\underline{D}}(\vec{r})=\vec{w}\circ\nabla$$

$\frac{d}{d\vec{r}}\left(\psi\cdot\vec{w}\right)=$	$\psi\cdot\frac{d\vec{w}}{d\vec{r}}+\vec{w}\circ\frac{d\psi}{d\vec{r}}$
$\left(\psi\cdot\vec{w}\right)\circ\nabla=$	$\psi\cdot\left(\vec{w}\circ\nabla\right)+\vec{w}\circ\nabla\psi$
$\frac{d}{d\vec{r}}\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)=$	$\vec{u}\cdot\frac{d\vec{w}}{d\vec{r}}+\vec{w}\cdot\frac{d\vec{w}}{d\vec{r}}$
$\nabla\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)=$	$\left(\nabla\circ\vec{w}\right)\vec{u}+\left(\nabla\circ\vec{u}\right)\vec{w}$
$\frac{d}{d\vec{r}}\vec{w}\left[\psi(\vec{r})\right]=$	$\frac{d\vec{w}}{d\psi}\circ\frac{d\psi}{d\vec{r}}$
$\vec{w}\left[\psi(\vec{r})\right]\circ\nabla=$	$\dot{\vec{w}}_\psi\circ\nabla\psi(\vec{r})$
$\frac{d}{d\vec{r}}\psi\left[\vec{w}(\vec{r})\right]=$	$\frac{d\psi}{d\vec{w}}\cdot\frac{d\vec{w}}{d\psi}$
$\nabla\psi\left[\vec{w}(\vec{r})\right]=$	$\left(\nabla\circ\vec{w}(\vec{r})\right)\nabla_{\vec{w}}\psi$

Tenzor-skalár függvény deriváltja:

$$\dot{\underline{\underline{R}}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{r}_{11}(t)&\dot{r}_{12}(t)&\dot{r}_{13}(t)\\\dot{r}_{21}(t)&\dot{r}_{22}(t)&\dot{r}_{23}(t)\\\dot{r}_{31}(t)&\dot{r}_{32}(t)&\dot{r}_{33}(t)\end{bmatrix}$$

Kiegészítés

Integrál értékének változása, ha az integrálás tartománya és az integrandusz is változik.

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f\left(x,y\right)dx=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_y'\left(x,y\right)dx+$$
$$+\beta'\left(y\right)\cdot f\left[\beta\left(y\right),y\right]-\alpha'\left(y\right)\cdot f\left[\alpha\left(y\right),y\right]$$

A térben levő folytonos közeg sebessége $\vec{v}\left(\vec{r},t\right)$, a V integrációs tartomány a mozgás közben ugyanazon részecskékből áll.
Az integrandusz és az integrálási tartomány is az idő függvénye.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)}\psi\left(\vec{r},t\right)dV=\iiint_{V(t)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\cdot\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\right)dV$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)}\vec{w}\left(\vec{r},t\right)dV=\iiint_{V(t)}\left(\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)\right)dV$$

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathcal{F}(t)}\vec{w}d\vec{F}=\iint_{\mathcal{F}(t)}\left(\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{w}\right)+\nabla\times\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)\right)d\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{g(t)}\vec{w}d\vec{r}=\int_{g(t)}\left(\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\left(\nabla\times\vec{w}\right)\times\vec{v}+\nabla\left(\vec{w}\cdot\vec{v}\right)\right)d\vec{r}$$