Valós változós komplex függvények

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f(t) = x(t) + iy(t) = r(t)\cdot(\cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t)) = r(t)\cdot e^{i\varphi(t)}$$

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t),\ \int f(t)\,dt = F(t) + C,\ \int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$f(x,y) = 0$ görbe egyenlete komplex alakban: $f\left(x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) = 0$.

Komplex változós komplex függvények

$f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ahol $z = x + iy$

Deriválás: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$	$f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y)$
$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$	$f'(z) = \dfrac{e^{-i\varphi}}{r}\left(v'_\varphi(r,\varphi) - iu'_\varphi(r,\varphi)\right)$
$f(z) = \rho(x,y)\cdot e^{i\vartheta(x,y)}$	$f'(z) = \left(\rho\cdot\vartheta'_y - i\rho'_y\right)\cdot e^{i\vartheta}$

Cauchy-Riemann-egyenletek:

$u'_x(x,y) = v'_y(x,y),\quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)$
$u'_r(r,\varphi) = \dfrac{1}{r}v'_\varphi(r,\varphi),\quad u'_\varphi(r,\varphi) = -rv'_r(r,\varphi)$
$\rho'_x = \rho\cdot\vartheta'_y,\quad \rho'_y = -\rho\cdot\vartheta'_x$

Harmonikus függvények: $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$.

Néhány elemi függvény

$f(z) =$	$u(x,y) + iv(x,y)$	D_f	$f'(z)$
$z =$	$x + iy = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$, $\varphi = arc(z) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x<0, y<0 \\ \dfrac{-\pi}{2}, & x=0, y<0 \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), & x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x<0, y\ge 0 \end{cases}$ $r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi \in]-\pi;\pi],\quad D_{arctg} = \left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$	$z \in \mathbb{C}$	1
$e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!} =$	$e^x\cdot(\cos y + i\sin y)$	$z \in \mathbb{C}$	e^z

$lnz =$	$= \ln r + i\varphi = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\varphi(x,y),\ r>0$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq 0$	$\frac{1}{z}$
$\log_\alpha z =$	$\frac{\ln z}{\ln\alpha} = \dots$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq 0,$ $\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq 1$	$\frac{1}{z\cdot\ln\alpha}$
$z^\alpha =$	$e^{\ln z^\alpha} = e^{\alpha\cdot\ln z} = \dots$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq 0,\quad \alpha\in\mathbb{C}$	$\alpha\cdot z^{\alpha-1}$
$\alpha^z =$	$e^{\ln\alpha^z} = e^{z\cdot\ln\alpha} = \dots$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq 0,$ $\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha>0,\quad \alpha\neq 1$	$\alpha^z\cdot\ln\alpha$
$\sin z =$ $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$	$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -ish(iz) =$ $= \sin x\cdot chy + i\cos x\cdot shy$	$z\in\mathbb{C}$	$\cos z$
$\cos z =$ $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!} =$	$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = ch(iz) =$ $= \cos x\cdot chy - i\sin x\cdot shy$	$z\in\mathbb{C}$	$-\sin z$
$tgz =$	$\frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = -ith(iz) =$ $= \frac{tgx\cdot(1-th^2y)}{1+tg^2x\cdot th^2y} + i\frac{thy\cdot(1+tg^2x)}{1+tg^2x\cdot th^2y}$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 z}$
$ctgz =$	$\frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = icth(iz) =$ $= \frac{ctgx\cdot(1-th^2y)}{1+ctg^2x\cdot th^2y} - i\frac{thy\cdot(1+ctg^2x)}{1+ctg^2x\cdot th^2y}$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq k\pi,$ $k\in\mathbb{Z}$	$\frac{-1}{\sin^2 z}$
$arc\sin z =$	$-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right) = \dots$	$z\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ $z\neq\pm1$
$arc\cos z =$	$-i\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) = \dots$	$z\in\mathbb{C}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$ $z\neq\pm1$
$arctgz =$	$\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz} = \dots$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq\pm i$	$\frac{1}{1+z^2}$
$arcctgz =$	$-\frac{1}{2i}\ln\frac{iz+1}{iz-1} = \dots$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq\pm i$	$\frac{-1}{1+z^2}$
$shz =$ $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$	$\frac{e^z-e^{-z}}{2} = -i\sin(iz) =$ $= shx\cdot\cos y + ichx\cdot\sin y$	$z\in\mathbb{C}$	chz
$chz =$ $= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} =$	$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cos(iz) =$ $= chx\cdot\cos y + ishx\cdot\sin y$	$z\in\mathbb{C}$	shz
$thz =$	$\frac{shz}{chz} = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} = -itg(iz) =$ $= \frac{thx+itgy}{1+ithx\cdot tgy}$	$z\in\mathbb{C},\quad z\neq i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right),$ $z\neq k\pi,$	$\frac{1}{ch^2z}$

$cthz =$	$\dfrac{chz}{shz} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = ictg(iz) = = \dfrac{cthx + itgy}{1 + icthx \cdot tgy}$	$z \neq i(k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{-1}{sh^2 z}$
$arshz =$	$\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) = -i\arcsin(iz) = \ldots$	$z \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ $z \neq \pm i$
$archz =$	$\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = i\arccos(z) = \ldots$	$z \in \mathbb{C}$	$\dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ $z \neq \pm 1$
$arthz =$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z} = -iarctg(iz) = \ldots$	$z \in \mathbb{C}, \quad z \neq \pm 1$	$\dfrac{1}{1-z^2}$
$arcth =$	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z+1}{z-1} = iarcctg(iz) = \ldots$	$z \in \mathbb{C}, \quad z \neq \pm 1$	$\dfrac{1}{1-z^2}$

$\sin(iz) =$	$ish(z)$	$\arcsin(iz) =$	$iarsh(z)$
$\cos(iz) =$	$ch(z)$	$\arccos(z) =$	$-iarch(z)$
$tg(iz) =$	$ith(z)$	$arctg(iz) =$	$iarth(z)$
$ctg(iz) =$	$-icth(z)$	$arcctg(iz) =$	$-iarcth(z)$

$e^w = z$ $z \neq 0$	$w = \ln z + i(k2\pi) = \ln r + i(\varphi + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\ln w = z$ $w \neq 0$	$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i\sin y)$
$w^n = z$	$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}\right)\right],$ $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$
$\sin w = z$	$w_1 = -i \cdot ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ $w_2 = -i \cdot ln\left(iz - \sqrt{1-z^2}\right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$
$\cos w = z$	$w_1 = -i \cdot ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ $w_2 = -i \cdot ln\left(z - \sqrt{z^2-1}\right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$
$shw = z$	$w_1 = ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) + i \cdot 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ $w_2 = ln\left(z - \sqrt{z^2+1}\right) + i \cdot 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$
$chw = z$	$w_1 = ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + i \cdot 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ $w_2 = ln\left(z - \sqrt{z^2-1}\right) + i \cdot 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$
$tgw = z$	$w = \dfrac{1}{2i} ln\dfrac{1+iz}{1-iz} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z},\ z \neq \pm i$

Komplex vonalintegrál:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt\text{, vagy}$$

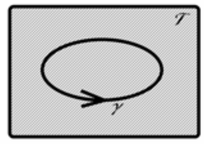
$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma (udx-vdy)+i\int_\gamma (vdx+udy)=\int_\alpha^\beta\left[\left(u(t)\cdot x'(t)-v(t)\cdot y'(t)\right)+i\left(v(t)\cdot x'(t)+u(t)\cdot y'(t)\right)\right]dt\,.$$

Newton-Leibniz-tétel:

Ha az f reguláris függvény primitív függvénye a $\mathcal{T}$ tartományon F, akkor bármely $\mathcal{T}$-ben haladó a kezdőpontú és b végpontú rektifikálható γ görbére: $\int_\gamma f(z)\,dz=F(b)-F(a)$.

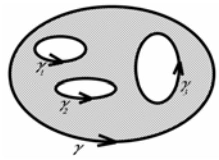
Cauchy-integráltétel:

Ha az f függvény reguláris az egyszeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban, akkor bármely $\mathcal{T}$-ben haladó γ zárt rektifikálható Jordan-görbére vonatkozó integrálja zérus, azaz $\oint_\gamma f(z)\,dz=0$.



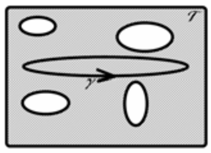
Általánosított Cauchy-integráltétel:

Ha f reguláris egy $(n+1)$-szeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban és annak γ külső és γ_k, ($k=1,2,\ldots,n$) belső határgörbéin, akkor egyező körüljárás esetén: $\oint_\gamma f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\,dz$.



A Cauchy-integráltétel 1. következménye:

Ha az f függvény a többszörösen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban reguláris, akkor valamely egyszeresen összefüggő $\mathcal{T}^*$ részében haladó γ zárt rektifikálható Jordan-görbére vonatkozó integrálja zérus. $\oint_\gamma f(z)\,dz=0$

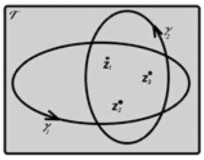


A Cauchy-integráltétel 2. következménye, Riemann tétele:

Ha az f függvény az egyszeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban a z_0 pont kivételével reguláris, a z_0 pont környezetében pedig korlátos, akkor bármely a z_0 pontot nem érintő zárt γ görbére: $\oint_\gamma f(z)\,dz=0$.

A Cauchy-integráltétel 3. következménye:

Ha az f függvény mindenütt reguláris az egyszeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban a véges sok $z_1, z_2, ..., z_n$ pont kivételével, akkor az izolált szinguláris pontokat körülvevő bármely γ zárt rektifikálható Jordan-görbére vonatkozó integrálja egyenlő, feltéve, hogy a görbéket azonos irányban járjuk be. $\oint\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$



Cauchy-integrálformula:

Legyen γ rektifikálható zárt Jordan-görbe, továbbá f függvény reguláris a γ görbén belül és a görbén, ekkor a γ görbe belsejének minden z_0 pontjára igaz, hogy $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$.

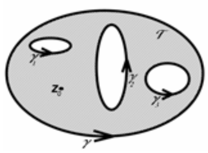
A Cauchy-integrálformula speciális esete, Gauss-féle középértéktétel:

Ha f reguláris a z_0 középpontú r sugarú zárt körlapon, akkor a kör középpontjában felvett függvényérték a kör kerületén felvett függvényértékek integrálközepe, azaz $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} f\left(z_0 + r \cdot e^{i\varphi}\right) d\varphi$.

A Cauchy-integrálformula kiterjesztése többszörösen összefüggő tartományra:

Ha az f függvény reguláris a γ és a belsejében levő $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ rektifikálható zárt Jordan-görbén, valamint az általuk meghatározott $(n+1)$-szeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományban, akkor tetszőleges $z_0 \in \mathcal{T}$-re:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \right].$$



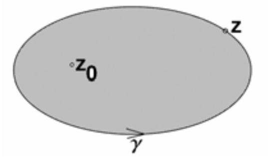
Általánosított Cauchy-integrálformula:

Ha az f függvény reguláris az egyszeresen összefüggő $\mathcal{T}$ tartományon és határán a γ rektifikálható zárt Jordan-görbén, akkor tetszőleges z_0 pontban akárhányszor deriválható és n-ed rendű deriváltja az alábbi integrálformulával állítható elő: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$.

Cauchy-típusú integrálok:

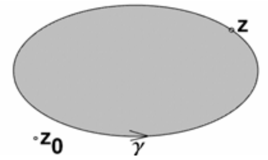
1. Ha f a γ görbe belsejében reguláris és a görbén folytonos, z_0 a γ görbe belsejében van, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}=f(z_0).$$



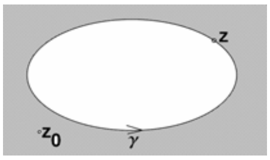
2. Ha f a γ görbe belsejében reguláris és a görbén folytonos, z_0 a γ görbén kívül van, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}=0.$$



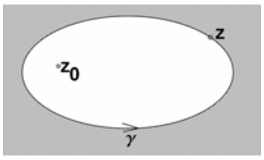
3. Ha f a γ görbén kívül és a ∞-ben reguláris, a görbén folytonos, z_0 a γ görbén kívül van, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}=-f(z_0)+f(\infty).$$



4. Ha f a γ görbén kívül és a ∞-ben reguláris, a görbén folytonos, z_0 a γ görbén belül van, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}=f(\infty).$$



Laurent-sor:

$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n$, ahol $c_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, $n\in\mathbb{Z}$, amely két részből áll.

Laurent-sor reguláris része (Taylor-sor), amely z_0 középpontú R sugarú körlapon belül konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n,$$

Laurent-sor főrésze, amely z_0 középpontú r sugarú körlapon kívül konvergens:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)\cdot(z-z_0)^{n-1}\,dz}{(z-z_0)^n}.$$

A két sor összege a két kör által meghatározott körgyűrű belsejében konvergens.

- *Megszüntethető szingularitása* van a függvénynek a z_0 pontban, ha a $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ határérték véges és $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq f(z_0)$. Ez pontosan akkor következik be, ha a z_0 körüli Laurent-sorának nincs főrésze.

- *Pólusa* van a függvénynek a z_0 pontban, ha a $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Ez pontosa akkor következik be, ha a z_0 körüli Laurent-sorának főrésze véges számú tagot tartalmaz. Ha ebben a Laurent-sorban $(z-z_0)^{-1}$ legmagasabb hatványa a k-adik, akkor a függvénynek ott k-ad rendű pólusa van. Ez pontosan akkor következik be, ha $f(z)$ előállítható $\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ alakban, ahol $g(z)$ a z_0 pontban reguláris és $g(z_0) \neq 0$.
$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k \cdot f(z) = g(z_0) \neq 0$$

- *Lényeges szingularitás* van a függvénynek a z_0 pontban, ha a $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ nem létezik. Ez pontosan akkor következik be, ha a z_0 körüli Laurent-sorának főrésze végtelen sok tagot tartalmaz.

- *Az $f(z)$ függvény a végtelenben úgy viselkedik, mint az $\varphi(z) := f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ függvény az origóban.*

  $f(z)$ a végtelenben reguláris, ha $\varphi(z)$-nek az origóban megszüntethető szingularitása van.
  $f(z)$ végtelen körüli Laurent-sora: $\varphi(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \dfrac{1}{z^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} \cdot z^n$, amely a $0 < |z| < \dfrac{1}{R}$ körgyűrűben konvergens, reguláris része: $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n \cdot (z-z_0)^n$, főrésze: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$. Ha a végtelen megszüntethető szingularitás, akkor a végtelen körüli Laurent-sornak nincs főrésze, ha pólus, akkor a reguláris rész véges sok tagot tartalmaz, ha lényeges szingularitás, akkor a főrész végtelen sok tagot tartalmaz.

Reziduum számítási módszerek

- $\operatorname{Res}(f, z_0) = -\operatorname{Res}(f, \infty) = c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$.

- Ha az f a z_0 pontban reguláris, vagy megszüntethető szingularitása van, akkor $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

- Ha f-nek z_0-ban elsőrendű pólusa van, akkor f előáll két reguláris függvény hányadosaként:
  $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, ahol $h(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, ekkor $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{h(z_0)}{g'(z_0)}$.

- Ha f-nek z_0-ban -ad rendű pólusa van, akkor $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \cdot \lim\limits_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^k \cdot f(z)\right]^{(k-1)}$.

Reziduum-tétel:

Ha f reguláris a γ zárt görbén és annak belsejében, kivéve a görbe belsejében lévő véges sok $z_1, z_2, \dots, z_n$ szinguláris pontot, akkor $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, \infty)$.

Legyen f olyan függvény, amelynek legfeljebb pólusszingularitásai lehetnek a $\mathcal{T}$ tartományban, γ olyan rektifikálható zárt Jordan-görbe, amely belsejével együtt a $\mathcal{T}$-ben van, és amelyik f egyetlen zérushelyén, illetve pólusán sem halad keresztül. Jelölje Z és P a görbe belsejében levő zérushelyek és pólusok számát, mindegyiket annyiszor számolva, ahányszoros a zérushely, illetve ahányadrendű a pólus. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P .$$

Ha F reguláris a $\mathcal{T}$ tartományban, továbbá z_j, p_k az f függvény zérushelyei és pólusai mindegyik multiplicitással számolva, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{Z} F(z_j) - \sum_{k=1}^{P} F(p_k).$$

Laurent-sor és Fourier-sor kapcsolata:

Legyen f reguláris a $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ körgyűrűben, f Laurent-sora az egységkörvonalon megegyezik az $f\left(e^{it}\right) := g(t)$ valós változós komplex függvény Fourier sorával. Alkalmazzuk a következő helyettesítéseket!

$$z = e^{it},\ \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \frac{z^n - \frac{1}{z^n}}{2i},\ \cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} = \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2},\ n \in \mathbb{N}^+$$

Az $I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$ típusú integrálok kiszámíthatók z komplex változóra történő áttéréssel, γ: origó középpontú egységsugarú körön való integrálással. Alkalmazzuk a következő helyettesítéseket!

$$z = e^{ix},\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},\ dx = \frac{1}{iz}dz .$$

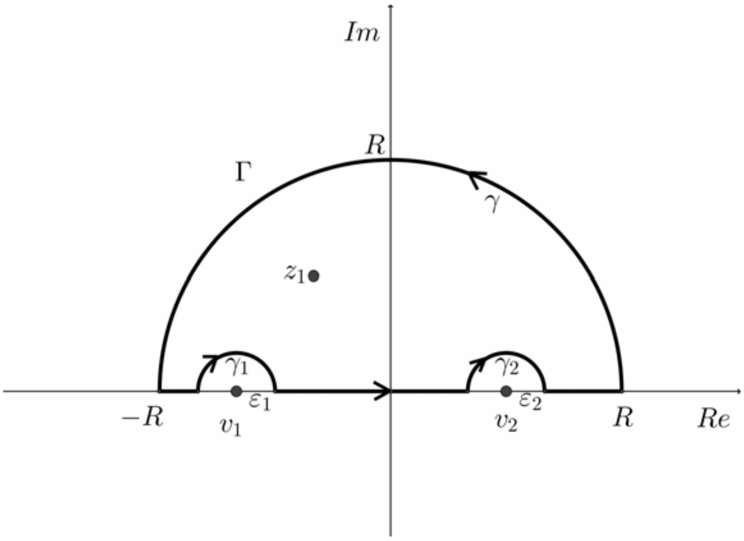
Jordan-lemma:

Ha az f komplex függvény véges sok szinguláris pontot kivéve reguláris az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkon, és $|z| \to \infty$ esetben egyenletesen tart zérushoz, akkor tetszőleges $a > 0$-ra: $\lim\limits_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)e^{iaz}dz = 0$, ahol γ: a $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ félkörív. A lemmát $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{iax}dx$ típusú integrálok kiszámítására használhatjuk.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *típusú valós improprius integrálok kiszámítása:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx =$

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{i,\operatorname{Im}v_i=0}\lim_{\varepsilon_i\to 0}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot\sum_{j,\operatorname{Im}z_j>0}\operatorname{Res}(f,z_j) - \sum_{i,\operatorname{Im}v_i=0}\lim_{\varepsilon_i\to 0}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, melyben a nevező legalább 2-vel magasabb fokú mint a számláló, akkor úgy viselkedik a végtelenben, mint $\frac{const.}{z^{2+a}}$, $a \geq 0$, ezért a félkörívre vonatkozó integrál eltűnik.



$\int_{0}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *típusú valós improprius integrálok kiszámítása,*

ahol $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *racionális törtfüggvény és a nevező fokszáma legalább kettővel több a számlálóénál:*

$\int_{0}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = -\sum\operatorname{Res}\left(\ln(-z)\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}\right)$, ha a függvénynek a pozitív valós féltengelyen és a nullában nincs pólusa. Az összegezés az $\ln(-z)\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}$ függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő.