**Közönséges differenciálegyenletek**

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

*Elemzés*

| | |
|---|---|
| Differenciálegyenlet | Olyan egyenlet, amelyben független változók, ezeknek valamilyen ismeretlen függvénye, és az ismeretlen függvénynek a független változók szerinti közönséges vagy parciális deriváltjai szerepelnek. |
| Parciális differenciálegyenlet | Az ismeretlen függvény többváltozós. |
| Közönséges differenciálegyenlet | Az ismeretlen függvény egyváltozós. |
| Rend | Az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendje. |
| Lineáris | $f_n(x)\cdot y^{(n)} + f_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + f_2(x)\cdot y'' + f_1(x)\cdot y' + f_0(x)\cdot y = h(x)$ |
| Nem lineáris | Lineáristól eltérő pl.: $y'\cdot y = 1$, $y' = \sin y$, … |
| Homogén | $h(x) = 0$ |
| Inhomogén | $h(x) \neq 0$ |
| Állandó együtthatós | $a_n \cdot y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = h(x)$,<br>$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ |
| Függvény együtthatós | $f_n(x)\cdot y^{(n)} + f_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + f_2(x)\cdot y'' + f_1(x)\cdot y' + f_0(x)\cdot y = h(x)$ |
| Fokszám | $p^n + f_{n-1}(x,y)\cdot p^{n-1} + \dots + f_1(x,y)\cdot p + f_0(x,y) = 0$, ahol $p := y'$,<br>elsőrendű $n$ -ed fokú d.e. |

*Differenciálegyenlet megoldása (integrálja)*

| | |
|---|---|
| Általános m.o. | A rendszámmal megegyező számú egymástól független állandót, mint paramétert tartalmaz, és deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet. |
| Partikuláris m.o. | A rendszámnál legalább 1-gyel kevesebb számú egymástól független állandót, mint paramétert tartalmaz, és deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenletet. |
| Reguláris m.o. | Ha az $y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$ jobb oldalán álló $f$ függvény valamennyi változójának egy $T$ zárt tartományban lévő bármely $\left(x_0, y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\right)$ értékrendszeréhez egy és csakis egy függvény tartozik, amely azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és a megadott kezdeti feltételeket (unicitás feltétele), akkor ezt reguláris megoldásnak nevezzük. Pontosan akkor van reguláris megoldás, ha $f$ függvény $T$ -ben korlátos, folytonos, és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek:<br>$\left\lvert f\left(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}\right) - f\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right)\right\rvert \le M \cdot \left(\lvert y_2 - y_1\rvert + \lvert y_2' - y_1'\rvert + \dots + \left\lvert y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}\right\rvert\right)$, ahol $M$ pozitív állandó. (Az $f$ függvényre biztosan teljesül a Lipschitz-féle feltétel, ha a $T$ zárt tartományban $f$ elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.) |
| Szinguláris m.o. | Egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének. Bármely pontjának környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, amely e ponthoz tartozó kezdeti feltételt kielégíti. |

**Közönséges differenciálegyenletek**

*Elemi úton integrálható elsőrendű differenciálegyenletek*

| | |
|---|---|
| Szétválasztható változójú d.e. $y'(x)=f(x)\cdot g(y)$ | $\int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx \Rightarrow G(y)=F(x)+c$, $g(y)\neq 0$, ha létezik $y$, melyre $g(y)=0$, akkor ez az $y$ a stacionárius megoldás. |
| Homogén fokszámú d.e. $y'(x)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ | $u:=\frac{y}{x} \Rightarrow y'=\frac{du}{dx}\cdot x+u$ |
| $y'(x)=f(ax+by+c)$ | $u:=ax+by+c \Rightarrow y'=\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{du}{dx}-a\right)$, $b\neq 0$ |
| $y'(x)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\neq 0$ | $\left.\begin{array}{l} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0 \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ |
| $y'(x)=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0$ | $u:=a_1x+b_1y+c_1 \Rightarrow y'=\frac{1}{b_1}\cdot\left(\frac{du}{dx}-a_1\right)$, $b_1\neq 0$ |
| $y'(x)=\frac{y}{x}\cdot f(x\cdot y)$ | $u:=x\cdot y \Rightarrow y'=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\cdot x-u\right)$ |
| Egzakt d.e. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, $M=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $N=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, $\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$ | Megoldás: $F(x,y)=const.$, $F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(u,y_0)du+\int_{y_0}^{y} N(x_0,v)dv$, vagy $F(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right]dy$, vagy $F(x,y)=\int N(x,y)dy+\int\left[M(x,y)-\int\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy\right]dx$ |
| Egzaktra visszavezethető d.e. Integráló tényező $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, $(m\cdot M)dx+(m\cdot N)dy=0$, $\frac{\partial(m\cdot M)}{\partial y}=\frac{\partial(m\cdot N)}{\partial x}$ | • $\frac{\partial \ln m}{\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)\Rightarrow m=e^{\int f(x)dx}$, <br>• $\frac{\partial \ln m}{\partial y}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=g(y)\Rightarrow m=e^{-\int g(y)dy}$, <br>• $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot f(x)-M\cdot g(y)\Rightarrow m=e^{\int f(x)dx+\int g(y)dy}$, <br>• $M$ és $N$ azonos fokszámú homogén függvények* és $M\cdot x+N\cdot y\neq 0\Rightarrow m=\frac{1}{M\cdot x+N\cdot y}$, <br>• $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ d.e. $y'(x)=\frac{y}{x}\cdot f(x\cdot y)$ alakú és $M\cdot x-N\cdot y\neq 0\Rightarrow m=\frac{1}{M\cdot x-N\cdot y}$ |

* $n$ -ed fokú homogén függvény: $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n\cdot M(x,y)$

**Közönséges differenciálegyenletek**

| | |
|---|---|
| Lineáris homogén d.e.<br>$Y' + Y \cdot p(x) = 0$ | $Y(x) = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$, $c \in \mathbb{R}$ |
| Elsőrendű lineáris inhomogén d.e.<br>$y' + y \cdot p(x) = q(x)$ | Megoldás: $y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left( \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right)$<br>$y(x) = Y(x) + y_p(x)$<br>• Állandó variálásának módszere<br>$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$, $c(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$<br>• Integráló tényezővel történő megoldás<br>$y' + y \cdot p(x) = q(x) \quad / \cdot e^{\int p(x)dx}$<br>$\frac{d}{dx}\left( y \cdot e^{\int p(x)dx} \right) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \quad / \int dx, \quad / \cdot e^{-\int p(x)dx}$<br>• $y_p$ -t szorzatfüggvény alakjában keressük<br>$y_p = u \cdot v \;\Rightarrow\; u \cdot (v' + p \cdot v) + (u' \cdot v - q) = 0$<br>$\left. \begin{array}{l} v' + p \cdot v = 0 \\ u' \cdot v - q = 0 \end{array} \right\}$, $u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c$, $v = e^{-\int p(x)dx}$<br>• Ha állandó együtthatós, akkor a próbafüggvény módszer is működik. Lásd a másodrendű d.e.-nél. |
| Bernoulli-féle d.e.<br>$y' + y \cdot p(x) = y^n \cdot q(x)$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, $q(x) \neq 0$ | $u := y^{-n+1}$, $y' = \frac{1}{1-n} \cdot y^n \cdot \frac{du}{dx}$,<br>$\frac{du}{dx} + u \cdot (1-n) \cdot p(x) = (1-n) \cdot q(x)$ |
| Elsőrendű, $p := y'$ -ben magasabb fokú<br>$p^n + f_{n-1}(x,y) \cdot p^{n-1} + \ldots + f_1(x,y) \cdot p + f_0(x,y) = 0$<br>a) $p$ -re megoldható d.e. | $p^n + f_{n-1}(x,y) \cdot p^{n-1} + \ldots + f_1(x,y) \cdot p + f_0(x,y) =$<br>$= (p - F_1) \cdot \ldots \cdot (p - F_n) = 0 \Rightarrow y' = F_1(x,y), \ldots, y' = F_n(x,y)$,<br>megoldásuk rendre: $g_1(x,y,c) = 0$, $\ldots, g_n(x,y,c) = 0 \Rightarrow$<br>általános megoldás: $g_1(x,y,c) \cdot \ldots \cdot g_n(x,y,c) = 0$ |
| Elsőrendű, $p := y'$ -ben magasabb fokú<br>b) $y$ -ra megoldható d.e.<br>$y = f(x,p)$ | $y' = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$,<br>amely $p$ -ben és $x$ -ben elsőrendű d.e., ha létezik<br>$F(p,x,c) = 0$ megoldása, akkor az $\left. \begin{array}{l} y = f(x,p) \\ F(p,x,c) = 0 \end{array} \right\}$<br>egyenletrendszer a d.e. megoldását jelenti, amelyből $x$ is és $y$ is $p$ paraméterrel kifejezhető. Ha ebből a $p$ paraméter kiküszöbölhető, akkor közvetlen kapcsolat írható fel $x$ és $y$ között. |
| Elsőrendű, $p := y'$ -ben magasabb fokú<br>c) $x$ -re megoldható d.e.<br>$x = f(y,p)$ | $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$,<br>amely $p$ -ben és $y$ -ban elsőrendű d.e., ha létezik<br>$F(p,y,c) = 0$ megoldása, akkor az $\left. \begin{array}{l} x = f(y,p) \\ F(p,y,c) = 0 \end{array} \right\}$<br>egyenletrendszer a d.e. megoldását jelenti, amelyből $x$ is és $y$ is $p$ paraméterrel kifejezhető. A $p$ paraméter kiküszöbölésével kapcsolat írható fel $x$ és $y$ között. |

**Közönséges differenciálegyenletek**

| | |
|---|---|
| Clairaut-féle d.e.<br>$y = p \cdot x + f(p)$,<br>ahol $p = y'$ | $y$ -ra megoldható d.e., ezért<br>$y' = p = \frac{dp}{dx} \cdot x + p + \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} \cdot \left( x + \frac{df}{dp} \right) = 0 \Rightarrow$<br>• $p = c \Rightarrow y = c \cdot x + f(c)$<br>• $x = -f'(p)$, $\left. \begin{matrix} x = -f'(p) \\ \underline{y = p \cdot x + f(p)} \end{matrix} \right\}$<br>amiből p esetleg kiküszöbölhető.<br>A Clairaut-féle differenciálegyenlet bármelyik megoldása a következő három típus valamelyikébe esik:<br>• az általános megoldás egyesseregének egyenesei,<br>• az egyenessereg burkolója, ez szinguláris megoldás,<br>• a burkoló egy darabja és e darab végpontjában (végpontjaiban) húzott érintő (érintőkből) álló alakzat. Ez annak az esetnek felel meg, amikor a szorzattá alakított d.e. mind a két tényezője egyszerre nulla. |
| $\left. \begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix} \right\}$,<br>$f$ az $\lvert x - x_0 \rvert < a \le \infty, \lvert y - y_0 \rvert < b \le \infty$ tartományban korlátos, $\lvert f(x,y) \rvert \le K$, folytonos és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek<br>$\lvert f(x,y_2) - f(x,y_1) \rvert \le M \cdot \lvert y_2 - y_1 \rvert$,<br>$M \in \mathbb{R}^+$ konstans | Picard iterációs módszere<br>$y_1(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(u, y(x_0)) du$,<br>$y_2(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(u, y_1(u)) du$, …,<br>$y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(u, y_{n-1}(u)) du$, …<br>függvénysorozat $n \to \infty$ estén a differenciálegyenlet megoldásához konvergál az $\lvert x - x_0 \rvert < \min\left( a, \frac{b}{K} \right)$ intervallumon |
| $\left. \begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix} \right\}$<br>$y(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ | Taylor-sorokkal történő megoldás<br>$y'(x) = g'(x) = f(x,y)$,<br>$y''(x) = g''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$,<br>$y'''(x) = g'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \ldots$ |
| $\left. \begin{matrix} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{matrix} \right\}$,<br>$f$ az $\lvert x - x_0 \rvert < a \le \infty, \lvert y - y_0 \rvert < b \le \infty$ tartományban korlátos, $\lvert f(x,y) \rvert \le K$, folytonos és<br>$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i \cdot (y - y_0)^j$ | Általános hatványsorokkal történő megoldás<br>$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, $\lvert x - x_0 \rvert < \min\left( a, \frac{b}{K} \right)$ |

**Közönséges differenciálegyenletek**

*Elemi úton integrálható másodrendű differenciálegyenletek*

<table>
<tr><td>$F\left(x, y', y''\right)=0$</td><td>Rendszámcsökkentés, $y$ nem lép fel explicit módon:<br>$y'=u\left(x\right),\ y''=\frac{du}{dx}$</td></tr>
<tr><td>$F\left(y, y', y''\right)=0$</td><td>Rendszámcsökkentés, $x$ nem lép fel explicit módon:<br>$y'=u\left(y\right),\ y''=\frac{du}{dy}\cdot u$</td></tr>
<tr><td>Lineáris, homogén, állandó együtthatós d.e.<br>$Y''+b\cdot Y'+c\cdot Y=0$<br>$b, c\in\mathbb{R}$</td><td>$Y\left(x\right)=k\cdot e^{\lambda\cdot x}$ alakban keressük a megoldást,<br>karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2+b\cdot\lambda+c=0$<br>• $\lambda_1\neq\lambda_2$ valós gyökök esetén<br>$Y\left(x\right)=k_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+k_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}$, $k_1\in\mathbb{R}$, $k_2\in\mathbb{R}$<br>• $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ egybeeső valós gyökök esetén<br>$Y\left(x\right)=k_1\cdot e^{\lambda\cdot x}+k_2\cdot x\cdot e^{\lambda\cdot x}$, $k_1\in\mathbb{R}$, $k_2\in\mathbb{R}$<br>• $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ komplex gyökök esetén<br>$Y\left(x\right)=e^{\alpha\cdot x}\cdot\left(k_1\cdot\cos\left(\beta\cdot x\right)+k_2\cdot\sin\left(\beta\cdot x\right)\right)$,<br>$k_1\in\mathbb{R}$, $k_2\in\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Lineáris, inhomogén, állandó együtthatós d.e.<br>$y''+b\cdot y'+c\cdot y=h\left(x\right)$<br>$b, c\in\mathbb{R}$</td><td>$y\left(x\right)=Y\left(x\right)+y_p\left(x\right)$<br>1. Próbafüggvény módszer
<table>
<tr><th>$h\left(x\right)$ típusa</th><th>$y_p\left(x\right)$-t ilyen alakban keressük</th></tr>
<tr><td>$x^n$</td><td>$a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$</td></tr>
<tr><td>$e^{\alpha\cdot x}$</td><td>$k\cdot e^{\alpha\cdot x}$</td></tr>
<tr><td>$\sin\left(\beta\cdot x+\gamma\right)$</td><td>$k_1\cdot\sin\left(\beta\cdot x+\gamma\right)+k_2\cdot\cos\left(\beta\cdot x+\gamma\right)$</td></tr>
<tr><td>$\cos\left(\beta\cdot x+\gamma\right)$</td><td>$k_1\cdot\sin\left(\beta\cdot x+\gamma\right)+k_2\cdot\cos\left(\beta\cdot x+\gamma\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">vagy ezek összege, szorzata, szorzatának összege, összegének szorzata.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rezonancia esetén a próbafüggvényt, vagy annak valamelyik tagját $x$ -el szorozzuk.</td></tr>
</table>
2. Állandó variálásának módszere<br>$y_p\left(x\right)=k_1\left(x\right)\cdot Y_1\left(x\right)+k_2\left(x\right)\cdot Y_2\left(x\right)$<br>$k_1\left(x\right)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & Y_2\left(x\right)\\ f\left(x\right) & Y_2'\left(x\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Y_1\left(x\right) & Y_2\left(x\right)\\ Y_1'\left(x\right) & Y_2'\left(x\right)\end{vmatrix}}dx,\ k_2\left(x\right)=\int\frac{\begin{vmatrix}Y_1\left(x\right) & 0\\ Y_2\left(x\right) & f\left(x\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Y_1\left(x\right) & Y_2\left(x\right)\\ Y_1'\left(x\right) & Y_2'\left(x\right)\end{vmatrix}}dx$</td></tr>
<tr><td>Euler-féle d.e.:<br>$\left(a\cdot x+b\right)^2\cdot y''\left(x\right)+r\cdot\left(a\cdot x+b\right)\cdot y'\left(x\right)+s\cdot y\left(x\right)=f\left(x\right)$<br>$a\cdot x+b>0$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$</td><td>$a\cdot x+b=e^t$, $y'=\dot{y}\cdot\frac{a}{a\cdot x+b}$,<br>$y''\left(x\right)=\left(\ddot{y}-\dot{y}\right)\cdot\frac{a^2}{\left(a\cdot x+b\right)^2}$,<br>$a\cdot\ddot{y}+a\cdot\left(r-a\right)\cdot\dot{y}+s\cdot y=f\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$</td></tr>
</table>

**Közönséges differenciálegyenletek**

*Néhány elemi úton integrálható magasabb rendű differenciálegyenlet*

Lineáris, homogén, állandó együtthatós d.e.

$$Y^{(n)}+a_{n-1}\cdot Y^{(n-1)}+\ldots+a_2\cdot Y''+a_1\cdot Y'+a_0\cdot Y=0$$

$$a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}\in\mathbb{R}$$

$Y(x)=k\cdot e^{\lambda\cdot x}$ alakban keressük a megoldást,

karakterisztikus egyenlet: $\lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+\ldots+a_2\cdot\lambda^2+a_1\cdot\lambda+a_0=0$

- ha $n$ (=rend) különböző valós gyök van $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, akkor $Y(x)=k_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+\ldots+k_n\cdot e^{\lambda_n\cdot x}$, $k_1\in\mathbb{R},\ldots,k_n\in\mathbb{R}$
  - ha $r(<n)$ különböző valós gyök van $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, és multiplicitásuk rendre $m_1,\ldots,m_r$, akkor a $\lambda_j$, $m_j$ multiplicitású gyökhöz tartozó megoldás $\left(k_0+k_1x_1+\ldots+k_{m_j-1}\cdot x^{m_j-1}\right)\cdot e^{\lambda_j\cdot x}$, ezt az összes gyökre felírjuk és ezek összege lesz a differenciálegyenlet megoldása
- ha a $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ különböző gyökök között komplexek is vannak $m_1,\ldots,m_r$ multiplicitással, akkor az előző pontban leírtak szerint járunk el, azonban a komplex konjugált gyökpárok közül elegendő az egyik pl. a pozitív képzetes részű gyök által adódó megoldást felírni, és a $\lambda_j=\alpha_j+\beta_j i$ komplex gyökhöz tartozó megoldásban $e^{\lambda_j\cdot x}$ helyére $e^{\alpha_j\cdot x}\cdot\left(k_1\cos\left(\beta_j\cdot x\right)+k_2\cdot\sin\left(\beta_j\cdot x\right)\right)$-t kell helyettesíteni.

Lineáris, homogén, állandó együtthatós d.e.

$$Y^{(n)}+a_{n-1}\cdot Y^{(n-1)}+\ldots+a_2\cdot Y''+a_1\cdot Y'+a_0\cdot Y=h(x),\ a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}\in\mathbb{R}\ b,c\in\mathbb{R}$$

$$y(x)=Y(x)+y_p(x)$$

$$P_n(\lambda):=\lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+\ldots+a_2\cdot\lambda^2+a_1\cdot\lambda+a_0$$

$$P_n(\alpha)=P_n'(\alpha)=\ldots=P_n^{(m-1)}(\alpha)=0,\ P_n^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

1. Próbafüggvény módszer

| $h(x)$ típusa | $y_p(x)$-t ilyen alakban keressük |
|---|---|
| $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^n$ | $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^m\cdot\left(a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0\right)$ |
| $e^{\alpha\cdot x}\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)$ | $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^m\cdot\left(k_1\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)+k_2\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)\right)$ |
| $e^{\alpha\cdot x}\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)$ | $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^m\cdot\left(k_1\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)+k_2\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)\right)$ |
| $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^n\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)$ | $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^m\cdot\left(a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0\right)\cdot\left(k_1\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)+k_2\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)\right)$ |
| $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^n\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)$ | $e^{\alpha\cdot x}\cdot x^m\cdot\left(a_n\cdot x^n+\ldots+a_1\cdot x+a_0\right)\cdot\left(k_1\cdot\sin(\beta\cdot x+\gamma)+k_2\cdot\cos(\beta\cdot x+\gamma)\right)$ |

2. Állandó variálásának módszere

$$y_p(x)=k_1(x)\cdot Y_1(x)+\ldots+k_n(x)\cdot Y_n(x)$$

$$k_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & Y_2 & \ldots & Y_n\\ 0 & Y_2' & & Y_n'\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ h(x) & Y_2^{(n-1)} & \ldots & Y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n\\ Y_1' & Y_2' & & Y_n'\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \ldots & Y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}dx,\ \ldots,\ k_n(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}Y_1 & Y_2 & \ldots & 0\\ Y_1' & Y_2' & & 0\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \ldots & h(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_n\\ Y_1' & Y_2' & & Y_n'\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & \ldots & Y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}dx$$